CHRISTOPHE CHEVERRY

Systèmes de lois de conservation et stabilité BV

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 75 (1998)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1998_2_75__1_0>

SYSTÈMES DE LOIS DE CONSERVATION ET STABILITÉ BV

Christophe Cheverry

***Résumé.* —** On considère un problème de Cauchy strictement hyperbolique, en dimension un d'espace. Les résultats classiques assurent l'existence pour tout temps, du moins lorsque les valeurs prises par l'amplitude et la variation totale de la donnée initiale sont proches de zéro. L'hypothèse de petitesse en norme L^∞ est en règle générale incontournable. La question est de savoir s'il est possible d'assouplir la restriction imposée à la variation. L'objectif de ce travail est de mettre à jour un critère qui permet de réaliser ce programme. La contrainte dont il s'agit porte sur le comportement quadratique du flux : les coefficients de vraie non linéarité doivent dominer les termes d'interaction. Dans ce contexte, on constate que la variation calculée sur des intervalles de longueur (convenablement) fixée décroit avec le temps. La mise à jour de cette nouvelle notion de décroissance est motivée par les applications suivantes : (1) Existence globale lorsque la condition initiale est périodique, avec une petite variation par période ; (2) Propriétés de compacité de l'opérateur solution ; (3) Temps de vie amélioré dans le cas de données petites en norme L^∞ mais grandes en variation.

***Abstract* (Systems of conservation laws and BV stability). —** We consider the Cauchy problem for strictly hyperbolic systems of conservation laws. Classical results give the existence for all times if the total variation and the sup-norm of the initial data are small enough. In general, we need the requirement that the sup-norm is small. The question is whether the restriction on the variation may be relaxed. A criterion under which this program can be achieved is produced. This constraint concerns the quadratic behaviour of the flux function near the basic state : the amount of genuine non linearty must dominate the interaction coefficients. In this context, the variation computed on intervals of fixed (appropriate) length is decreasing. The different applications of this new notion of decrease are related to : (1) Existence in the large for periodic initial data with small BV-norm by period ; (2) Compactness properties of the solution operator ; (3) Better life span in the case of a small amplitude but a large variation.

Table des matières

INTRODUCTION

Soit $(\mathcal{H})$ le problème de Cauchy hyperbolique monodimensionnel :

$$(\mathcal{H}) := \begin{cases} (\partial_t u)(t,x) + \partial_x[F\big(u(t,x)\big)] = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = h(x) = \big(h_i(x)\big)_{1 \leqslant i \leqslant N}. \end{cases}$$

Le flux :

$$\begin{array}{rcl} F : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ u := (u_1, \ldots, u_N) & \longmapsto & F(u) := \big(F_1(u), \ldots, F_N(u)\big), \end{array} \tag{0.1}$$

est une application qui est supposée régulière (de classe au moins C^3) sur tout un voisinage ouvert Ω_1 d'un point $\bar{u}$ choisi comme état de référence. Chacune des composantes u_i est changée en $u_i - \bar{u}_i$. Ces translations ont pour effet de placer l'état $\bar{u}$ à l'origine :

$$\bar{u} := (0, \ldots, 0). \tag{0.2}$$

Le système de N lois de conservation $(\mathcal{H})$ est supposé strictement hyperbolique en $\bar{u}$. Cette hypothèse signifie que la matrice $DF(\bar{u})$ admet des valeurs propres qui sont deux à deux distinctes. Quitte à changer une nouvelle fois d'état u, on peut toujours supposer que la matrice $DF(\bar{u})$ est mise sous forme diagonale. Ses valeurs propres sont alors notées λ_i et sont rangées par ordre croissant :

$$\lambda_1 < \cdots < \lambda_i < \cdots < \lambda_N. \tag{0.3}$$

La condition d'hyperbolicité écrite en (0.3) permet de construire sur un voisinage ouvert $\Omega_2 \subset \Omega_1$ du point $\bar{u}$ un système bi-orthogonal. Un tel système consiste en la donnée d'une base vectorielle $\{r^1(u), \ldots, r^N(u)\}$, formée de vecteurs propres à droite :

$$DF(u) \cdot r^i(u) = \lambda_i(u) r^i(u), \quad u \in \Omega_2, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{0.4}$$

ainsi que d'une base vectorielle $\{l_1(u), \ldots, l_N(u)\}$ duale de la précédente et formée de vecteurs propres à gauche :

$$l_i(u) \cdot DF(u) = \lambda_i(u) l_i(u), \quad u \in \Omega_2, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{0.5}$$

Les vecteurs propres à droite et à gauche sont déterminés de manière à vérifier des relations de normalisation :

$$(0.6) \qquad r^j(\bar u) = (\delta_{jk})_{1\leqslant k\leqslant N}, \quad l_j(\bar u) = {}^{\mathrm t}(\delta_{jk})_{1\leqslant k\leqslant N}, \quad l_j(u)\cdot r^k(u) = \delta_{jk}$$

avec $u \in \Omega_2, j, k = 1, \dots, N$, où la lettre δ_{jk} désigne le symbole de Kronecker : le nombre δ_{jk} prend pour valeur 1 si l'indice j coïncide avec k et 0 sinon.

Comme indiqué dans le résumé, la vraie non linéarité est imposée au point base $\bar u$. En d'autres termes, la discussion porte sur des flux qui satisfont :

$$(0.7) \qquad \Gamma^i_{ii} := \nabla_u \lambda_i(\bar u)\cdot r^i(\bar u) > 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Un changement linéaire sur les variables d'état :

$$(0.8) \qquad u_i \longmapsto \Gamma^i_{ii} u_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

a pour effet d'aligner l'ensemble des coefficients Γ^i_{ii} sur la valeur 1 :

$$(0.9) \qquad \Gamma^i_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Les N^3 *coefficients d'interaction* Λ^{pq}_i désignent alors les composantes calculées dans la base $\{r^1(u), \dots, r^N(u)\}$ du crochet de Lie associé aux champs de vecteurs $r^p(u)$ et $r^q(u)$:

$$(0.10) \qquad \begin{aligned} \{r^p;\, r^q\}(\bar u) \quad &:= \quad (r^p\cdot\nabla)r^q(\bar u) - (r^q\cdot\nabla)r^p(\bar u) \\ &:= \quad \sum_{i=1}^N \Lambda^{pq}_i r^i(\bar u), \quad p, q = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Ces conventions ayant été adoptées, le *rapport d'influence* $\mathcal R$ est une expression numérique qui compte la contribution apportée en valeur absolue par tous les coefficients d'interaction correspondant à des indices i, p et q deux à deux distincts :

$$(0.11) \qquad \mathcal R := \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \; \sum_{i\neq p<q\neq i} |\Lambda^{pq}_i| \,.$$

La *taille* d'un état u est mesurée en calculant :

$$(0.12) \qquad \|u\|_\infty := \max_{1\leqslant i\leqslant N} |u_i| \,.$$

L'*amplitude* d'une fonction $h(\cdot)$ est contrôlée par :

$$(0.13) \qquad \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb R)} := \sup_{x\in\mathbb R} \|h(x)\|_\infty \,.$$

La *variation totale* de la fonction $h(\cdot)$ désigne la quantité :

$$(0.14) \qquad \mathrm{V}^{\mathrm{tot}}_{\mathrm{ar}}(h(\cdot)) := \max_{1\leqslant i\leqslant N} \; \sup_{x_1<\cdots<x_n} \; \sum_{j=1}^{n-1} |h_i(x_{j+1}) - h_i(x_j)| \,.$$

Lorsque l'application $h(\cdot)$ est choisie périodique avec pour période le nombre P, on aura de préférence recours à la variation de $h(\cdot)$ évaluée sur une période, c'est-à-dire :

$$\mathrm{V}_{\mathrm{ar}}^{\mathrm{per}}\big(h(\cdot)\big) := \max_{1\leqslant i\leqslant N} \sup_{0\leqslant x_1<\cdots<x_n<P} \sum_{j=1}^{n-1} |h_i(x_{j+1}) - h_i(x_j)| \,. \tag{0.15}$$

Cet article met en œuvre des outils et des concepts dont l'efficacité et l'à propos sont illustrés par les deux résultats **(1)** et **(2)** suivants :

(1) Existence globale lorsque la donnée initiale est choisie périodique, avec une petite variation par période :

Théorème A. — *Soit $\mathcal{R}_0$ et η_0 deux constantes strictement positives. On considère un flux $F(u)$ dont le rapport d'influence $\mathcal{R}$ se trouve majoré par le paramètre $\mathcal{R}_0$:*

$$0 \leqslant \mathcal{R} \leqslant \mathcal{R}_0. \tag{0.16}$$

On se donne aussi une condition initiale $h(x)$, périodique de période P, dont la moyenne sur une période est nulle et dont la variation par période ne dépasse pas le seuil η_0 :

$$0 \leqslant V_{ar}^{per}\big(h(\cdot)\big) \leqslant \eta_0. \tag{0.17}$$

Alors, pour $\mathcal{R}_0$ et η_0 suffisamment petits, le problème de Cauchy $(\mathcal{H})$ admet une solution faible entropique $u(t,x)$ qui est définie pour tout temps. De plus, le comportement asymptotique en temps de la fonction $u(t,x)$ se trouve contrôlé par les lois de décroissance :

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{C_0}{t}, \quad t \in \,]0,\infty[. \tag{0.18}$$

$$V_{ar}^{per}\big(u(t,\cdot)\big) \leqslant \frac{C_0}{t}, \quad t \in \,]0,\infty[. \tag{0.19}$$

La restriction à un intervalle $]a,b[$ d'une fonction $v(\cdot)$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier sera désormais notée $v_{|]a,b[}(\cdot)$:

$$\begin{array}{rcl} v_{|]a,b[} :]a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ x & \longmapsto & v_{|]a,b[}(x) := v(x). \end{array} \tag{0.20}$$

(2) Propriétés de compacité de l'opérateur solution :

Théorème B. — *Soit $\mathcal{R}_0$ et η_0 deux constantes strictement positives. On considère un flux $F(u)$ qui admet un (petit) domaine d'invariance pour le problème de Riemann (cette hypothèse est introduite uniquement pour pouvoir disposer d'une estimation L^∞ à priori) et dont le rapport d'influence $\mathcal{R}$ se trouve majoré par le paramètre $\mathcal{R}_0$:*

$$0 \leqslant \mathcal{R} \leqslant \mathcal{R}_0. \tag{0.21}$$

On se donne aussi une condition initiale $h(x)$ dont l'amplitude est contrôlée conformément à :

$$0 \leqslant \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \eta_0. \tag{0.22}$$

Alors, pour $\mathcal{R}_0$ et η_0 suffisamment petits, le problème de Cauchy $(\mathcal{H})$ admet une solution faible entropique $u(t,x)$ qui est définie pour tout temps. De plus, pour tout couple (a,b) avec $-\infty < a < b < \infty$, l'opérateur solution :

$$\begin{array}{rcl} S_a^b(t) : B_{L^\infty(\mathbb{R})}(\bar{u};\eta_0] & \longrightarrow & L^1(]a,b[) \\ h(\cdot) & \longmapsto & S_a^b(t)\big(h(\cdot)\big) := u_{|]a,b[}(t,\cdot), \end{array} \tag{0.23}$$

est compact.

Une littérature importante est consacrée à la construction de solutions pour le système hyperbolique $(\mathcal{H})$. Ces solutions sont habituellement obtenues à l'aide de schémas. Le plus connu est celui de Glimm [**G**]. Un algorithme qui présente des aspects novateurs a récemment été proposé par Bressan [**B1**]. Ces résultats ont un point commun. Ils assurent l'existence pour tout temps d'une solution faible lorsque la donnée initiale $h(x)$ est astreinte aux deux conditions de petitesse suivantes :

$$0 \leqslant \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \eta_1 \ll 1, \quad \eta_1 > 0. \tag{0.24}$$

$$0 \leqslant \mathrm{V}_{\mathrm{ar}}^{\mathrm{tot}}\big(h(\cdot)\big) \leqslant \eta_1 \ll 1, \quad \eta_1 > 0. \tag{0.25}$$

Notez que la contrainte introduite en (0.24) est requise au niveau des deux propositions A et B. Cette restriction n'a rien d'étonnant. En effet, la résolution du problème de Riemann associé à deux états u_g et u_d sert d'élément constitutif à la construction de solutions pour $(\mathcal{H})$. Or, sans hypothèses supplémentaires sur le flux $F(u)$, cette résolution n'est réalisable que si les vecteurs u_g et u_d sont suffisamment proches de l'origine $\bar{u}$. D'où la nécessité d'imposer le contrôle (0.24).

En revanche, la contrainte (0.25) ne figure plus parmi les hypothèses des théorèmes A et B. Cette absence signifie qu'un pas a été franchi dans la compréhension des systèmes de lois de conservation. Cette amélioration est non triviale. Elle ne se déduit pas des énoncés connus à ce jour. Pour s'en convaincre, rappelons brièvement les informations que délivrent (dans le contexte des énoncés A et B) une argumentation plus classique.

Pour une donnée initiale périodique, de moyenne nulle, choisie comme en (0.17) avec η_0 petit, le résultat de Glimm [**G**] assure l'existence d'une solution $u(t,x)$ définie dans une bande $[0,T] \times \mathbb{R}$ avec T fini (voir à ce propos les explications qui sont données en début de chapitre V.1 ou encore, pour plus de détails, l'article de Schochet [**Sc3**]). Rien ne garantit que cette solution locale en temps puisse être prolongée au delà de l'instant T. En effet, dans l'analyse de Glimm [**G**], il se produit une perte d'estimations BV lorsque l'instant t se rapproche du temps d'arrêt T. Voilà pourquoi, il est impossible d'itérer tel quel le raisonnement tenu dans Schochet [**Sc3**] avec T pour nouvel instant de départ.

Sous les hypothèses du théorème B, la méthode usuelle s'organise selon trois mouvements : Approximation de la donnée initiale par une suite de conditions initiales convenablement régularisées; Construction de solutions approchées (globales en temps), associées aux problèmes de Cauchy correspondants ; Convergence d'une sous-suite extraite vers une solution exacte. Comme un domaine d'invariance est à disposition, le solveur de Riemann fabrique systématiquement des états dont la taille reste bornée. Dès lors, les estimations en norme $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ sont facilement garanties. Cette stabilité en amplitude n'est pourtant pas suffisante en vue de mener à bien les deux dernières étapes mentionnées ci-dessus. En effet, leur réalisation nécessite aussi de pouvoir contrôler ce que devient la variation (afin de pouvoir passer à la limite dans les expressions non linéaires). Or, sur ce point précis, les travaux antérieurs n'apportent aucune réponse vraiment satisfaisante.

Maintenant que nous avons motivé notre démarche, expliquons le point de vue développé dans cet article.

L'évolution en temps des solutions du problème de Cauchy $(\mathcal{H})$ est sous l'influence d'interactions non linéaires. Pour des solutions de faible amplitude, la nature de ces interactions se repère au niveau du développement quadratique du flux $F(u)$ près de l'origine $\bar{u}$. Interviennent dans ce développement *les coefficients de flux* Γ^i_{ik}. Ces quantités traduisent le défaut induit sur les vitesses de propagation par la présence de non linéarité. Elles sont obtenues en calculant le gradient des valeurs propres :

$$\nabla_u \lambda_i(\bar{u}) := \sum_{k=1}^{N} \Gamma^i_{ik} l_k(\bar{u}), \quad i = 1, \dots, N. \tag{0.26}$$

Interviennent aussi les *coefficients d'interaction* Λ_i^{pq} (qui sont définis par la formule (0.10)). Ces expressions gèrent les échanges non linéaires qui s'effectuent entre les différents modes de propagation.

Il est important de comprendre le rôle joué par ces différents coefficients en ce qui concerne l'évolution de la variation.

La présence de coefficients d'interaction non nuls favorise sinon provoque la croissance BV. Cette affirmation est étayée par les travaux de Joly-Métivier-Rauch [**JMR1**], de Schochet [**Sc3**] et de l'auteur [**Ch1**]–[**Ch4**] sur l'optique géométrique.

Un phénomène non linéaire connu sous le nom de résonance a été isolé. Ce phénomène peut, lorsque la norme BV de la donnée de Cauchy dépasse un certain seuil (en tout état de cause plus élevé que la valeur critique η_1 qui intervient en (0.24) et (0.25)), provoquer en temps fini l'explosion d'une solution. Plus précisément, les normes BV, L^∞ et L^1 se trouvent simultanément multipliées par un facteur arbitraire. Les mécanismes qui sont à la base de cette amplification ont été mis à jour à l'issue de manipulations heuristiques par Hunter [**H**]. Ils ont ensuite été rigoureusement établis par Joly-Métivier-Rauch [**JMR2**].

Dans la situation inverse, à savoir lorsque les coefficients d'interaction sont tous nuls au point base $\bar{u}$ (dans ce cas la quantité $\mathcal{R}$ vaut zero), Schochet [**Sc1**] a mis à