MÉMOIRES DE LA S. M. F.

EMMANUEL RISLER

Linéarisation des perturbations holomorphes des rotations et applications

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 77 (1999)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1999_2_77__R3_0>

LINÉARISATION DES PERTURBATIONS HOLOMORPHES DES ROTATIONS ET APPLICATIONS

Emmanuel Risler

Résumé. — Ce travail est consacré à l'étude de la dynamique des applications holomorphes proches d'une rotation dans un anneau, et en particulier au problème de la linéarisation de ces applications, c'est-à-dire la possibilité ou non de les conjuguer holomorphiquement à des rotations.

Soit F une application holomorphe sur un anneau ouvert A de $\mathbf{C}$, et holomorphiquement conjuguée sur A à une rotation irrationnelle $R_{\alpha_0} : z \mapsto e^{2i\pi\alpha_0}z$, $\alpha_0 \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})/\mathbf{Z}$. Supposons que F soit plongée dans une famille $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'applications holomorphes sur A, dépendant holomorphiquement d'un paramètre λ qui varie dans un ouvert Λ de $\mathbf{C}^n$, avec $F = F_{\lambda_0}$, $\lambda_0 \in \Lambda$.

Pour $\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$, notons Λ_α l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que l'application F_λ soit holomorphiquement conjuguée à l'application $R_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z$ sur un sous-anneau de A.

Si α_0 vérifie une certaine condition arithmétique de non-résonance (la condition de Bruno), on montre les résultats suivants :

1) L'ensemble Λ_{α_0} (qui contient λ_0) définit au voisinage de λ_0 une sous-variété analytique complexe de codimension 1 de Λ (autrement dit, la condition d'être holomorphiquement conjuguée à R_{α_0} est une condition de codimension 1). La condition de Bruno est optimale pour ce résultat.

2) Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ (non nécessairement réel) assez proche de α_0, et satisfaisant à une condition de non-résonance analogue à la condition de Bruno (pour les α réels, il s'agit d'une condition de Bruno uniforme), on a la même propriété : l'ensemble Λ_α définit, au voisinage de λ_0, une sous-variété analytique complexe (non vide) de codimension 1 de Λ.

On obtient ainsi un feuilletage partiel d'un voisinage de λ_0 dans Λ par des sous-variétés analytiques de codimension 1. On montre que la correspondance $\lambda \mapsto \alpha$, définie sur ce feuilletage partiel, est régulière (C^∞) au sens de Whitney.

Les résultats relatifs aux α réels sont principalement basés sur une construction de renormalisation de la dynamique des applications considérées, formellement analogue à celle introduite par J.-C. Yoccoz pour étudier le problème de Siegel ([**18**]), mais techniquement plus délicate ; en effet, on a besoin ici de renormaliser simultanément toute une famille analytiquement paramétrée d'applications, ce qui rend nécessaire l'utilisation de techniques d'analyse de plusieurs variables complexes (en particulier la résolution d'un problème $\bar{\partial}$, par la méthode des estimées L^2 de Hörmander).

L'extension aux α complexes est une conséquence géométrique des résultats relatifs aux α réels, et la propriété de régularité au sens de Whitney se déduit de cette extension par des estimées de fonctions analytiques.

À la fin de l'article, on décrit certaines conséquences de ces résultats pour les domaines singuliers de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman) des fractions rationnelles sur la sphère de Riemann. Si R est une fraction rationnelle qui admet un anneau de Herman (ou un disque de Siegel) dont le nombre de rotation vérifie la condition de Bruno, alors on retrouve le feuilletage partiel décrit ci-dessus au voisinage de R dans l'espace des fractions rationnelles de même degré (dans le cas d'un disque de Siegel, ce feuilletage correspond simplement aux ensembles de niveau du multiplicateur du point fixe ou périodique correspondant au centre du disque). On définit globalement les feuilles correspondant aux disques de Siegel et aux anneaux de Herman, et on montre (toujours sous la condition de Bruno) que disques et anneaux dépendent continûment (pour une topologie adéquate) de la fraction rationnelle sur ces feuilles.

***Abstract* (Linearization of holomorphic perturbations of rotations and applications)**

This work is devoted to the study of the dynamics of holomorphic maps which are close to a rotation in an annulus, and in particular the linearization problem, i.e. the problem of holomorphically conjugating these maps to rotations.

Take a holomorphic map F on an open annulus A of $\mathbf{C}$, F being holomorphically conjugated on A to an irrational rotation $R_{\alpha_0} : z \mapsto e^{2i\pi\alpha_0}z$, $\alpha_0 \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})\mathbf{Z}$. Suppose that F is embedded in a family $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ of holomorphic maps on A, depending holomorphically on a parameter λ which varies in an open set Λ of $\mathbf{C}^n$, with $F = F_{\lambda_0}$, $\lambda_0 \in \Lambda$.

For $\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$, denote by Λ_α the set of $\lambda \in \Lambda$ for which the map F_λ is holomorphically conjugated to the map $R_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z$ on a sub-annulus of A.

If α_0 satisfies a certain arithmetic non-resonance condition (the Bruno condition), we prove the following results :

1) In a neighborhood of λ_0, the set Λ_{α_0} (which contains α_0) defines a one-codimensional complex analytic submanifold of Λ (roughly speaking, the condition of being holomorphically conjugated to R_{α_0} is a one-codimensional condition). The Bruno condition is optimal for this result.

2) More generally, for any α in $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ sufficiently close to α_0 (α not necessarily real), and satisfying a non-resonance condition which is analogous to the Bruno condition (for real α, it is a uniform Bruno condition), we have the same property : in a neighborhood of λ_0, the set Λ_α defines a one-codimensional (non-empty) complex-analytic submanifold of Λ.

This way we obtain a partial foliation of a neighborhood of λ_0 in Λ by one-codimensional complex-analytic submanifolds. We prove that the correspondence $\lambda \mapsto \alpha$, defined on this partial foliation, is regular (C^∞) in the sense of Whitney.

The results for real α are mainly based on a construction of renormalization of the dynamics of the considered maps, formally analogous to the one introduced by J.-C.

Yoccoz to study the Siegel problem ([**18**]), but technically more delicate ; indeed, here we have to simultaneously renormalize a whole analytically parametrized family of maps, which requires the use of several complex variables techniques (in particular the resolution of a $\bar{\partial}$-problem, by Hörmander's method of L^2-estimates).

The extension to complex α is a geometrical consequence of the results for real α, and the regularity property in the sense of Whitney follows from this extension through estimates for analytic functions.

At the end of the paper, we describe certain consequences of these results on singular rotation domains (Siegel discs and Herman rings) of rational maps on the Riemann sphere. If R is a rational map admitting a Herman ring (or a Siegel disc) whose rotation number satisfies the Bruno condition, then we again find the above described partial foliation in a neighborhood of R in the space of rational maps of fixed degree (in the case of a Siegel disc, this foliation simply corresponds to the level sets of the multiplier of the fixed or periodic point corresponding to the center of the disc). We globally define the sheets corresponding to Siegel discs and Herman rings, and we show (still under the Bruno condition) that discs and rings continuously depend (for a suitable topology) on the rational map on these sheets.

Table des matières

INTRODUCTION

0.1. Introduction

On note $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ le quotient de $\mathbf{C}$ par les translations entières et $\pi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ la projection canonique. Pour $\Delta > 0$, posons : $\mathbf{B}_\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \Delta\}$ et : $\mathbf{A}_\Delta = \pi(\mathbf{B}_\Delta)$. Notons $\mathcal{D}(\Delta)$ l'ensemble des applications : $\mathbf{B}_\Delta \to \mathbf{C}$, qui sont holomorphes sur $\mathbf{B}_\Delta$ et qui commutent avec les translations entières.

Pour $\alpha \in \mathbf{C}$, notons T_α la translation : $z \mapsto z + \alpha$.

Au cours de cet article, le terme *analytique* signifiera toujours, sauf spécification contraire, analytique complexe.

DÉFINITION. — Soient $F \in \mathcal{D}(\Delta)$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. On dira que F est *analytiquement conjuguée à la translation* T_α s'il existe $\Delta' > 0$ ($\Delta' < \Delta$) et une application $H \in \mathcal{D}(\Delta')$, injective sur $\mathbf{B}_{\Delta'}$, vérifiant : $H(\mathbf{B}_{\Delta'}) \subset \mathbf{B}_\Delta$, et telle qu'on ait :

$$F \circ H(z) = H(z + \alpha), \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta'}.$$

Le principal objectif de ce travail est d'étudier cette notion de conjugaison pour des applications de $\mathcal{D}(\Delta)$ proches de translations (donc relevées d'applications proches de rotations, d'où le terme « perturbations holomorphes de rotations »). Nous avons choisi par commodité de nous placer presque toujours dans le revêtement $\mathbf{C}$ de $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ plutôt que dans $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$.

DÉFINITION. — On appellera *domaine de linéarisation* pour une application $F \in \mathcal{D}(\Delta)$ tout ensemble $A \subset \mathbf{B}_\Delta$ ouvert, connexe, simplement connexe, $\mathbf{Z}$-périodique, et invariant par F, c'est-à-dire vérifiant : $F(A) \subset A$.

Si une application $F \in \mathcal{D}(\Delta)$ admet un domaine de linéarisation A, et si f désigne l'application : $\mathbf{A}_\Delta \to \mathbf{C}$ dont F est un relevé par π, alors $\pi(A)$ est un anneau ouvert, séparant les deux bouts de $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$, et $f(\pi(A)) \subset \pi(A)$. Toute représentation conforme de $\pi(A)$ dans un anneau standard conjugue alors f à une rotation pure. En particulier, $f(\pi(A)) = \pi(A)$, $F(A) = A$, et F est analytiquement conjuguée à une translation réelle (au sens de la définition ci-dessus). Il est donc équivalent, pour une application $F \in \mathcal{D}(\Delta)$, d'être analytiquement conjuguée à une translation réelle, ou d'admettre un domaine de linéarisation. On dira, lorsqu'on est dans ce cas, que F est *linéarisable.* Il existe alors un *domaine de linéarisation maximal* (pour l'inclusion), et le vecteur α (réel) de la translation à laquelle F est analytiquement conjuguée est défini de manière unique.

Posons : $\mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, et notons $D^\omega(\mathbf{T}^1)$ l'ensemble des relevés à $\mathbf{R}$ des difféomorphismes $\mathbf{R}$-analytiques du cercle préservant l'orientation (c'est-à-dire l'ensemble des difféomorphismes $\mathbf{R}$-analytiques de $\mathbf{R}$ qui commutent avec les translations entières). Remarquons que toute application $F \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$ s'étend en une application holomorphe sur un voisinage $\mathbf{Z}$-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, et définit donc un élément de $\mathcal{D}(\Delta)$, pour $\Delta > 0$ suffisamment petit (la classe des applications de $\mathcal{D}(\Delta)$, $\Delta > 0$, est donc plus large que celle des relevés de difféomorphismes analytiques du cercle). À tout $F \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$ est associé un « nombre de rotation » dans $\mathbf{R}$, que l'on note $\rho(F)$. Une application $F \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$ est dite « analytiquement linéarisable » si F est conjuguée à la translation $T_{\rho(F)}$ par une application conjugante $\mathbf{R}$-analytique (appartenant elle-même à $D^\omega(\mathbf{T}^1)$). La notion de linéarisabilité définie plus haut pour les applications de $\mathcal{D}(\Delta)$ prolonge naturellement cette notion de linéarisabilité analytique pour les difféomorphismes analytiques du cercle.

L'objectif de ce travail est d'étudier, d'unifier, et d'appliquer un certain nombre de résultats connus sur la linéarisabilité analytique des difféomorphismes analytiques du cercle et des applications de $\mathcal{D}(\Delta)$. Tous les résultats seront de nature locale (c'est-à-dire que les applications considérées seront toujours proches de translations) et dépendront fortement des propriétés arithmétiques (petits diviseurs) du nombre de rotation. Dans les rappels historiques qui vont suivre, nous nous bornerons à ne mentionner que des résultats de nature locale.

Les premiers résultats concernant la linéarisabilité des difféomorphismes analytiques du cercle sont dus à Arnold ([**2**], 1965), qui a démontré que, si α satisfait à la condition diophantienne DC_1 (c'est-à-dire s'il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$, on ait : $|\alpha - p/q| \geq \gamma/|q|^3$) alors tout difféomorphisme analytique du cercle de nombre de rotation α et suffisamment proche de T_α est analytiquement conjugué à T_α (un résultat analogue en classe différentiable a été obtenu à la même époque par Moser). La démonstration d'Arnold est basée sur la méthode de Newton, c'est-à-dire sur une construction de la conjugaison par approximations successives, grâce à des solutions de l'équation linéarisée.

Un problème analogue à celui de la linéarisabilité analytique des difféomorphismes analytiques du cercle est celui de la linéarisabilité des germes d'applications holomorphes au voisinage d'un point fixe indifférent dans $\mathbf{C}$, le fameux problème de Siegel. C. L. Siegel a démontré ([**16**], 1942) que si α vérifie une condition diophantienne, alors tout germe d'application holomorphe au voisinage d'un point fixe de multiplicateur $e^{2i\pi\alpha}$ est linéarisable. A. D. Bruno a amélioré ([**4**], 1971) ce résultat en montrant qu'une condition suffisante pour avoir toujours linéarisabilité s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log q_{k+1}}{q_k} < \infty,$$

où $(q_k)_{k\in\mathbf{N}}$ désigne la suite des réduites du développement en fraction continue de α. Cette condition, connue sous le nom de condition de Bruno, apparaît comme la condition arithmétique naturelle et optimale pour les problèmes locaux de linéarisabilité analytique en dimension 1 ; c'est sous cette condition que nous allons nous placer tout au long de cet article.

H. Rüssmann a généralisé ([**14**], 1972) le théorème local d'Arnold (énoncé ci-dessus) en affaiblissant la condition arithmétique portant sur α. Dans cet article, il établit que ce théorème est valable dès que α satisfait à une condition diophantienne très proche — mais néanmoins un peu plus restrictive — que la condition de Bruno. Sa démonstration repose à nouveau sur la méthode de Newton. Plus récemment ([**15**], 1995), Rüssmann a amélioré cette méthode grâce à un calcul nouveau et plus performant des estimées sur les approximations successives des solutions. Il en déduit une amélioration du théorème local de Kolmogorov-Arnold sur la linéarisation des mouvements quasi-périodiques pour les perturbations analytiques des systèmes hamiltoniens intégrables, en montrant la persistance de toutes les fréquences satisfaisant à la condition de Bruno. Il est possible que cette méthode permette de résoudre d'autres problèmes locaux de petits diviseurs en classe analytique, sous la condition de Bruno, en particulier certains résultats que nous allons établir ici par des méthodes complètement différentes.

Dans [**7**], 1985, M. Herman présente une démonstration simple du théorème local d'Arnold ainsi que de l'extension de ce résultat aux applications de $\mathcal{D}(\Delta)$, à savoir : si α est un réel qui satisfait à la condition diophantienne DC_1, alors, pour tout $\Delta > 0$, et pour tout $F \in \mathcal{D}(\Delta)$ suffisamment proche d'une translation, il existe (un unique) $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que l'application : $z \mapsto \lambda + F(z)$ soit analytiquement conjuguée à T_α. Cet énoncé généralise naturellement le théorème local d'Arnold en remplaçant la condition (de codimension 1) explicite consistant à fixer le nombre de rotation par une condition de codimension 1 implicite. La démonstration de Herman utilise la dérivée schwartzienne pour transformer astucieusement l'équation de conjugaison ; il se ramène ainsi à une équation résoluble sans outil sophistiqué d'analyse fonctionnelle : le théorème des fonctions implicites standard ou le théorème du point fixe de Schauder-Tychonov suffisent pour conclure. Ceci fournit, pour toute application $F \in \mathcal{D}(\Delta)$ proche d'une translation, une application $\alpha \mapsto \lambda(\alpha)$, définie sur un sous-ensemble de DC_1 (du type : $DC_{1,\gamma} = \{\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \mid \text{ pour tout } p/q \in \mathbf{Q}, |\alpha - p/q| \geq \gamma/|q|^3\}$), à valeurs dans $\mathbf{C}$, telle que, pour chaque α appartenant à ce sous-ensemble, l'application $\lambda(\alpha) + F$ soit analytiquement conjuguée à T_α. Herman montre ensuite (par la même méthode) que le résultat de linéarisation ci-dessus et l'application $\alpha \mapsto \lambda(\alpha)$ s'étendent pour des α appartenant à un sous-ensemble du plan complexe construit à partir de $DC_{1,\gamma}$. Comme le fait remarquer Herman, tous ces résultats sont en fait implicitement contenus dans l'article d'Arnold [**2**] (la démonstration d'Herman a l'avantage d'être considérablement plus simple). Cette extension complexe permet à Herman de montrer que l'application