

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PATRICE LE CALVEZ

**Décomposition des difféomorphismes du tore en applications déviant la verticale (avec un appendice en collaboration avec Jean-Marc Gambaudo)**

*Mémoires de la S. M. F. 2<sup>e</sup> série*, tome 79 (1999)

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1999\\_2\\_79\\_\\_R3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1999_2_79__R3_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# DÉCOMPOSITION DES DIFFÉOMORPHISMES DU TORE EN APPLICATIONS DÉVIAINT LA VERTICALE

Patrice Le Calvez

*suivi d'un appendice par*

Jean-Marc Gambaudo et Patrice Le Calvez

**Résumé.** — Tout difféomorphisme  $F$  du tore  $\mathbf{T}^2$  de dimension 2 homotope à l'identité s'écrit comme composée de difféomorphismes déviant la verticale alternativement à droite et à gauche. La donnée d'une telle décomposition et d'un relèvement fixé  $f$  de  $F$  au plan permet de construire naturellement un champ de vecteurs sur une variété  $E$  difféomorphe à  $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^{2n-2}$ , où l'entier  $2n$ , égal au nombre d'applications apparaissant dans la décomposition, est d'autant plus grand que le difféomorphisme est loin de l'identité. L'ensemble des singularités de ce champ de vecteurs est en bijection avec l'ensemble des points fixes de  $F$  qui se relèvent en des points fixes de  $f$ . L'étude de ce champ de vecteurs a été initiée dans [L1], principalement dans le cas où il n'y a pas de singularité. Nous étudions ici le cas plus général où apparaissent de telles singularités. Nous en déduisons des résultats généraux sur les points fixes et les orbites périodiques des difféomorphismes du tore homotopes à l'identité.

John Franks a démontré qu'un homéomorphisme de l'anneau fermé  $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$  ou de l'anneau ouvert  $\mathbf{T}^1 \times ]0, 1[$ , qui préserve l'aire et qui a un point fixe, admet une infinité d'orbites périodiques. Dans un appendice écrit en collaboration avec J.-M. Gambaudo, nous donnons une démonstration différente de ce résultat pour les difféomorphismes de l'anneau fermé.

## **Abstract (Decomposition of diffeomorphisms of the torus in twist maps)**

Every diffeomorphism of the two-dimensional torus  $\mathbf{T}^2$  can be written as a composition of positive and negative twist maps. If we consider such a decomposition and a given lift  $f$  of  $F$  to the plane, we can construct naturally a vector field on a manifold diffeomorphic to  $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^{2n-2}$ , where  $2n$  is the number of maps which appear in the decomposition and becomes big when  $f$  is far from the identity. There is a one-to-one correspondence between the set of singularities of this vector field and the set of fixed points of  $F$  which are lifted to fixed points of  $f$ . The study of this vector field has begun in [L1], mainly in the case when there is no singularity. We study here the general case when these singularities may exist. We deduce general properties about

fixed points and periodic orbits of diffeomorphisms of the torus which are homotopic to the identity.

John Franks has proved that an area-preserving homeomorphism of the closed annulus  $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$  or the open annulus  $\mathbf{T}^1 \times ]0, 1[$  which has at least one fixed point possesses an infinite number of periodic orbits. In an appendix written in collaboration with J.-M. Gambaudo, we give a different proof of this result for the diffeomorphisms of the closed annulus.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Décomposition des difféomorphismes du tore en applications déviant la verticale,</b>	
par P. Le Calvez .....	1
<b>0. Introduction</b> .....	3
0.1. Théorème de Conley-Zehnder .....	3
0.2. Construction d'une fonction génératrice .....	4
0.3. Rappels des résultats de [L1] .....	8
0.4. Plan de l'article .....	10
<b>1. Notations, définitions, rappels</b> .....	17
1.1. Notations .....	17
1.2. Distance de Hausdorff .....	17
1.3. Difféomorphismes du tore .....	18
1.4. Nombre d'enlacement de deux points fixes .....	19
1.5. Ensembles non enlacés .....	20
1.6. Difféomorphismes déviant la verticale .....	21
1.7. Décomposition en difféomorphismes déviant la verticale .....	23
1.8. Champ de vecteurs $\xi$ associé à une décomposition .....	24
1.9. Champ de vecteurs $\tilde{\xi}$ associé à une décomposition .....	26
1.10. Premières propriétés dynamiques de $\tilde{\xi}$ .....	28
1.11. Dépendance continue par rapport à $\Phi$ .....	29
1.12. Étude du cas conservatif .....	30
<b>2. Fonctions d'enlacement</b> .....	31
2.1. Fonction d'enlacement $L$ .....	31
2.2. Fonctions d'enlacement pour le champ de vecteurs $\tilde{\xi}$ .....	33
2.3. Fonctions d'enlacement pour le champ de vecteurs $\xi$ .....	35
2.4. Fonctions d'enlacement sur les fibrés tangents et projectifs .....	36
2.5. Démonstration du lemme fondamental .....	39
2.6. Démonstration de la proposition 2.4.1 .....	42

<b>3. Décomposition dominée du fibré tangent, variétés intégrales</b> . . . . .	45
3.1. Matrices de Jacobi . . . . .	45
3.2. Existence d'une décomposition dominée du fibré tangent . . . . .	46
3.3. Variétés intégrales des champs d'espaces $x \mapsto E_j^-(x)$ et $x \mapsto E_j^+(x)$ . . . . .	52
3.4. Propriétés de stabilité . . . . .	54
3.5. Variétés intégrales des champs de plans $x \mapsto E_j(x)$ . . . . .	56
3.6. Variétés intégrales dans le quotient $\tilde{E}$ . . . . .	58
<b>4. Éléments critiques des champs de vecteurs <math>\xi</math> et <math>\tilde{\xi}</math></b> . . . . .	59
4.1. Ensembles bien enlacés . . . . .	59
4.2. Une propriété des points non errants de $\tilde{\xi}$ . . . . .	61
4.3. Nombre d'enlacement de courbes de Jordan bien enlacées . . . . .	62
4.4. Construction d'un plan d'enlacement contenant des éléments critiques . . . . .	65
4.5. Une propriété des ensembles finis bien enlacés . . . . .	66
<b>5. Existence de tores fixes d'enlacement 0</b> . . . . .	69
5.1. Ensembles non enlacés . . . . .	69
5.2. Caractérisation des tores fixes d'enlacement 0 . . . . .	70
5.3. Première étape de la démonstration de la proposition 5.2.1 . . . . .	72
5.4. Deuxième étape de la démonstration de la proposition 5.2.1 . . . . .	73
5.5. Troisième étape de la démonstration de la proposition 5.2.1 . . . . .	75
<b>6. Propriétés des tores fixes</b> . . . . .	79
6.1. Lien entre les parties non enlacées de $\text{sing}(\tilde{\xi})$ et les parties non enlacées de $\text{Fix}(f)$ . . . . .	79
6.2. Une propriété des tores fixes d'enlacement 0 . . . . .	82
6.3. Un théorème de translation sur le tore . . . . .	84
6.4. Une propriété des ensembles bien enlacés . . . . .	85
<b>7. Bifurcation des tores fixes</b> . . . . .	87
7.1. Nombre de rotation d'un point fixe . . . . .	87
7.2. Nombre de rotation et nombre d'enlacement . . . . .	88
7.3. Famille à un paramètre avec des bifurcations de type selle-nœud . . . . .	89
7.4. Bifurcation des tores fixes . . . . .	90
<b>8. Étude des itérés</b> . . . . .	95
8.1. Construction des champs de vecteurs $\xi$ et $\tilde{\xi}$ pour $f^q - (p, p')$ . . . . .	95
8.2. Propriétés dynamiques des champs de vecteurs $\xi$ et $\tilde{\xi}$ pour $f^q - (p, p')$ . . . . .	96
8.3. Ensembles $\varphi$ -non enlacés . . . . .	98
8.4. Correspondance avec les ensembles $f$ -non enlacés . . . . .	99
8.5. Un théorème de translation dans le cas périodique . . . . .	100
<b>9. Fonction d'enlacement définie par un point fixe ou une orbite périodique</b> . . . . .	103
9.1. Fonction d'enlacement définie par un point fixe . . . . .	103
9.2. Fonction d'enlacement définie par une orbite périodique . . . . .	107

<b>10. Construction de cercles fantômes</b> .....	111
10.1. Construction des champs de vecteurs $\xi$ et $\tilde{\xi}$ .....	112
10.2. Premières propriétés dynamiques de $\xi$ et de $\tilde{\xi}$ .....	113
10.3. Fonctions d'enlacement .....	114
10.4. Ensembles non enlacés .....	115
10.5. Existence de tores fixes d'enlacement 0 .....	116
10.6. Une démonstration directe d'existence de courbes fantômes .....	118
10.7. Une application aux difféomorphismes du tore .....	118
10.8. Une question naturelle .....	120

### *Appendice*

<b>Infinité d'orbites périodiques pour les difféomorphismes conservatifs de l'anneau</b> , par J.-M. Gambaudo et P. Le Calvez .....	125
0. Introduction .....	125
1. Notations .....	126
2. Nombre de rotation sur l'anneau compact .....	127
3. Nombre de rotation sur l'anneau ouvert .....	128
4. Un critère de non-nullité du nombre de rotation .....	129
5. Nombre de rotation sur le tore .....	130
6. Critères d'existence d'orbites périodiques dans un ensemble annulaire . . .	131
7. Un champ de vecteurs sur le tore dont les courbes intégrales relevées sont des droites de Brouwer .....	131
8. Démonstration du résultat fondamental .....	133
9. Démonstration du théorème .....	138
10. Annexe .....	139
<b>Bibliographie</b> .....	143
<b>Index</b> .....	147



**DÉCOMPOSITION  
DES DIFFÉOMORPHISMES DU TORE  
EN APPLICATIONS DÉVIANT  
LA VERTICALE**

**P. Le Calvez**



## CHAPITRE 0

### INTRODUCTION

#### 0.1. Théorème de Conley-Zehnder

On a le résultat suivant, dû à C. Conley et E. Zehnder [CZ] :

THÉORÈME 0.1.1. — *Soit  $F$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  du tore  $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$  homotope à l'identité qui préserve la mesure de Lebesgue  $\mu$  et  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$  qui préserve le centre de gravité, c'est-à-dire qui vérifie*

$$\int_{\mathbf{T}^2} (f - \text{Id}) d\mu = 0.$$

*Alors  $f$  admet au moins trois points fixes qui se projettent dans le tore en trois points fixes distincts de  $F$ .*

Une façon équivalente d'écrire les hypothèses est de supposer que  $F$  est le temps 1 d'un champ de vecteurs hamiltonien dépendant du temps (pour la structure symplectique canonique) et  $f$  le temps 1 du champ relevé. Sous cette forme, le théorème de Conley-Zehnder s'énonce en toute dimension : le difféomorphisme  $f$  admet au moins  $2m + 1$  points fixes dont les projections dans le tore  $\mathbf{T}^{2m}$  sont distinctes. Cet entier est le nombre minimum de points critiques de toute fonction définie sur le tore. Ce théorème est un cas particulier de la conjecture d'Arnold, c'est le point de départ d'une branche importante de la géométrie symplectique actuelle (voir par exemple le livre de Hofer et Zehnder [HZ]).

La démonstration de Conley-Zehnder est basée sur l'étude d'une fonctionnelle sur un espace de lacets, dont on cherche les points critiques. Ce problème de dimension infinie se réduit ensuite à un problème de dimension finie : on cherche le nombre minimum de points critiques d'une fonction sur une variété non compacte, on considère l'ensemble des points d'orbites bornées pour le champ de gradient de la fonction et on montre que la topologie de cet ensemble est au moins celle du tore.