MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PATRICE LE CALVEZ

Décomposition des difféomorphismes du tore en applications déviant la verticale (avec un appendice en collaboration avec Jean-Marc Gambaudo)

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 79 (1999)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1999_2_79__R3_0>

DÉCOMPOSITION DES DIFFÉOMORPHISMES DU TORE EN APPLICATIONS DÉVIANT LA VERTICALE

Patrice Le Calvez

suivi d'un appendice par
Jean-Marc Gambaudo et Patrice Le Calvez

Résumé. — Tout difféomorphisme F du tore $\mathbf{T}^2$ de dimension 2 homotope à l'identité s'écrit comme composée de difféomorphismes déviant la verticale alternativement à droite et à gauche. La donnée d'une telle décomposition et d'un relèvement fixé f de F au plan permet de construire naturellement un champ de vecteurs sur une variété E difféomorphe à $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^{2n-2}$, où l'entier $2n$, égal au nombre d'applications apparaissant dans la décomposition, est d'autant plus grand que le difféomorphisme est loin de l'identité. L'ensemble des singularités de ce champ de vecteurs est en bijection avec l'ensemble des points fixes de F qui se relèvent en des points fixes de f. L'étude de ce champ de vecteurs a été initiée dans [**L1**], principalement dans le cas où il n'y a pas de singularité. Nous étudions ici le cas plus général où apparaissent de telles singularités. Nous en déduisons des résultats généraux sur les points fixes et les orbites périodiques des difféomorphismes du tore homotopes à l'identité.

John Franks a démontré qu'un homéomorphisme de l'anneau fermé $\mathbf{T}^1 \times [0,1]$ ou de l'anneau ouvert $\mathbf{T}^1 \times]0,1[$, qui préserve l'aire et qui a un point fixe, admet une infinité d'orbites périodiques. Dans un appendice écrit en collaboration avec J.-M. Gambaudo, nous donnons une démonstration différente de ce résultat pour les difféomorphismes de l'anneau fermé.

***Abstract* (Decomposition of diffeomorphims of the torus in twist maps)**

Every diffeomorphism of the two-dimensional torus $\mathbf{T}^2$ can be written as a composition of positive and negative twist maps. If we consider such a decomposition and a given lift f of F to the plane, we can construct naturally a vector field on a manifold diffeomorphic to $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^{2n-2}$, where $2n$ is the number of maps which appear in the decomposition and becomes big when f is far from the identity. There is a one-to-one correspondence between the set of singularities of this vector field and the set of fixed points of F which are lifted to fixed points of f. The study of this vector field has begun in [**L1**], mainly in the case when there is no singularity. We study here the general case when these singularities may exist. We deduce general properties about

fixed points and periodic orbits of diffeomorphisms of the torus which are homotopic to the identity.

John Franks has proved that an area-preserving homeomorphism of the closed annulus $\mathbf{T}^1 \times [0,1]$ or the open annulus $\mathbf{T}^1 \times]0,1[$ which has at least one fixed point possesses an infinite number of periodic orbits. In an appendix written in collaboration with J.-M. Gambaudo, we give a different proof of this result for the diffeomorphisms of the closed annulus.

TABLE DES MATIÈRES

DÉCOMPOSITION DES DIFFÉOMORPHISMES DU TORE EN APPLICATIONS DÉVIANT LA VERTICALE

P. Le Calvez

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

0.1. Théorème de Conley-Zehnder

On a le résultat suivant, dû à C. Conley et E. Zenhder [**CZ**] :

THÉORÈME 0.1.1. — *Soit F un difféomorphisme de classe C^1 du tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ homotope à l'identité qui préserve la mesure de Lebesgue μ et f un relèvement de F à $\mathbf{R}^2$ qui préserve le centre de gravité, c'est-à-dire qui vérifie*

$$\int_{\mathbf{T}^2} (f - \mathrm{Id})\, d\mu = 0.$$

Alors f admet au moins trois points fixes qui se projettent dans le tore en trois points fixes distincts de F.

Une façon équivalente d'écrire les hypothèses est de supposer que F est le temps 1 d'un champ de vecteurs hamiltonien dépendant du temps (pour la structure symplectique canonique) et f le temps 1 du champ relevé. Sous cette forme, le théorème de Conley-Zehnder s'énonce en toute dimension : le difféomorphisme f admet au moins $2m+1$ points fixes dont les projections dans le tore $\mathbf{T}^{2m}$ sont distinctes. Cet entier est le nombre minimum de points critiques de toute fonction définie sur le tore. Ce théorème est un cas particulier de la conjecture d'Arnold, c'est le point de départ d'une branche importante de la géométrie symplectique actuelle (voir par exemple le livre de Hofer et Zehnder [**HZ**]).

La démonstration de Conley-Zehnder est basée sur l'étude d'une fonctionnelle sur un espace de lacets, dont on cherche les points critiques. Ce problème de dimension infinie se réduit ensuite à un problème de dimension finie : on cherche le nombre minimum de points critiques d'une fonction sur une variété non compacte, on considère l'ensemble des points d'orbites bornées pour le champ de gradient de la fonction et on montre que la topologie de cet ensemble est au moins celle du tore.