MÉMOIRES DE LA SMF 84

THÉORIE D'IWASAWA DES REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES SEMI-STABLES

Bernadette Perrin-Riou

Société Mathématique de France 2001
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

B. Perrin-Riou
Mathématiques, UMR 8628 du CNRS, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : `bpr@math.u-psud.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11E95, 11R23.
Mots clefs. — Semi-stable, Iwasawa, normes universelles.

THÉORIE D'IWASAWA DES REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES SEMI-STABLES

Bernadette Perrin-Riou

Résumé. — Soient F une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et V une représentation p-adique galoisienne semi-stable sur F de dimension d. On développe dans ce texte la théorie d'Iwasawa relative à V et à la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique. En particulier, on construit un « logarithme » (régulateur) du module d'Iwasawa local associé à V (construit à partir de sa cohomologie galoisienne) dans un module très explicite sur l'algèbre engendrée par les fonctions analytiques sur la couronne $\{p^{-1/(p-1)} < |x| < 1\}$ et $\log x$.

***Abstract* (Iwasawa theory of semi-stable p-adic representations)**
Let F be a finite unramified extension of $\mathbb{Q}_p$ and V a p-adic galois semi-stable representation on F of dimension d. We develop Iwasawa theory for V and the $\mathbb{Z}_p$-cyclotomic extension: we construct a logarithm (regulator map) from the Iwasawa module associated to the Galois cohomology of V in a very explicit module on an algebra generated by analytic functions on the annulus $\{p^{-1/(p-1)} < |x| < 1\}$ and $\log x$.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1

1. Anneaux de fonctions 9
1.1. L'anneau $\mathcal{B}$ 9
1.2. L'anneau $\mathcal{B}[\log x]$ 13
1.3. Structure de G_∞-modules 19

2. Modules d'Iwasawa associés à un (φ, N)-module 25
2.1. (φ, N)-modules 25
2.2. Étude de la dérivation 25
2.3. Quelques G_∞-modules 28
2.4. Exemple : $N = 0$ 32
2.5. Exemples de dimension $\leqslant 2$ 37

3. Construction d'éléments de $\mathcal{D}_{\infty,*}(\mathcal{D})$ 41
3.1. Construction d'éléments de $\mathcal{B}[\log x]$ 41
3.2. Construction d'éléments de $\mathcal{D}_{\infty,e}(\mathcal{D})$ 43
3.3. Construction d'éléments de $\mathcal{D}_{\infty,g}(\mathcal{D})$ 47

4. Théorèmes de structure des $\mathcal{D}_{\infty,*}(\mathcal{D})$ 55
4.1. Lien entre les $\mathcal{D}_{\infty,*}(\mathcal{D})$ 55
4.2. Rang des $\mathcal{D}_{\infty,*}(\mathcal{D})$ 56
4.3. Comportement par suite exacte 58

5. Exponentielle 61
5.1. Construction d'éléments de B_{dR} 61
5.2. Théorème-définition de l'exponentielle 69
5.3. Loi de réciprocité 76
5.4. Déterminant de $\Omega_{V,h}$ 80

6. Normes universelles 85
6.1. Ingrédients 85
6.2. Esquisse de la démonstration 87

A. Digression : le polylogarithme 89
A.1. Polylogarithmes (définition naïve) 89
A.2. Polylogarithmes et fonction de Kubota-Leopoldt 93
A.3. Polylogarithmes et éléments de ${B_{\mathrm{st}}^{+}}^{G_{K_\infty}}$ 96

B. Étude de $\boldsymbol{\mathcal{B}}^{\psi=0}$ 99
B.1. Préliminaires 99
B.2. Structure de G_∞-modules 99

Quelques formules 105

Bibliographie 107

Index 109

INTRODUCTION

Ce texte fait partie d'une série d'articles désirant comprendre la théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques géométriques sur une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$ ainsi que de faire une théorie générale des fonctions L p-adiques associées à une représentation p-adique géométrique d'un corps de nombres. Dans [**19**] a d'abord été traité le cas des représentations p-adiques absolument cristallines (cristallines sur un corps K non ramifié). Ce travail local a été ensuite utilisé dans [**21**] dans le cas des représentations p-adiques géométriques du groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ qui sont cristallines en p. Des cas particuliers exploitant ce travail ont été traités dans [**20**] (cas multiplicatif), [**22**] (cas des courbes elliptiques), [**24**] (cas du carré symétrique d'une courbe elliptique).

Dans [**6**], Colmez a montré la loi de réciprocité conjecturée dans [**19**], ce qui est fondamental, car une partie des résultats des articles cités reposait sur cette loi. De plus, il étend en partie la théorie faite dans le cas des représentations p-adiques de de Rham. Cependant, ce travail me semblait inachevé et peu exploitable (par moi en tout cas) tel quel.

Dans le texte qui suit, nous construisons, dans le cas des représentations p-adiques semi-stables d'une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, l'exponentielle et le logarithme « élargis » en théorie d'Iwasawa. Nous démontrons, pour les représentations semi-stables, la conjecture énoncée dans [**26**] relative au rang des normes universelles. Du travail de Colmez, nous utilisons la loi de réciprocité.

Expliquons la manière de procéder en prenant $K = \mathbb{Q}_p$:

1) Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre des fonctions (strictement) analytiques sur le disque $\{x \in \mathbb{C}_p,\, |x| < 1\}$ vérifiant une condition de croissance logarithmique lorsque $|x| \to 1$. Soit $\mathcal{B}$ l'algèbre des fonctions (strictement) analytiques sur une couronne du type $\{x \in \mathbb{C}_p,\, \eta \leqslant |x| < 1\}$ et vérifiant là encore une condition de croissance logarithmique lorsque $|x| \to 1$. Choisissons un(e branche du) logarithme $\log x$, c'est-à-dire une fonction localement analytique sur $\mathbb{C}_p - \{0\}$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$\log xy = \log x + \log y$ et dont la dérivée en 1 soit 1. L'algèbre $\mathcal{B}[\log x]$ des polynômes en $\log x$ à coefficients dans $\mathcal{B}$ peut être munie d'une action du groupe de Galois $G_\infty = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$, d'un opérateur φ (opérateur de Frobenius) et d'un opérateur N (opérateur de monodromie) commutant à l'action de G_∞ et vérifiant $N\varphi = p\varphi N$ et d'une dérivation D prolongeant les actions usuelles sur $\mathcal{B}$, commutant avec N et telle que $D\varphi = p\varphi D$ et $D\tau = \chi(\tau)\tau D$ pour $\tau \in G_\infty$ et χ le caractère cyclotomique donnant l'action de G_∞ sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de p. Enfin φ admet un inverse à gauche ψ. Ainsi, pour $f \in \mathcal{B}[\log x]$

$$\varphi \circ \psi(f) = p^{-1} \sum_{\zeta \in \mu_p} f(\zeta(1+x) - 1)$$

où μ_p est le groupe des racines p-ièmes de l'unité. Soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p(\mu_p))$ et $\Delta = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_p)/\mathbb{Q}_p)$. Définissons

$$\mathcal{B}(G_\infty) = \mathbb{Z}_p[\Delta] \otimes \mathcal{B}(\Gamma), \quad \mathcal{H}(G_\infty) = \mathbb{Z}_p[\Delta] \otimes \mathcal{H}(\Gamma)$$

avec $\mathcal{B}(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{H}(\Gamma)$) l'image de $\mathcal{B}$ (resp. de $\mathcal{H}$) par l'application $x \mapsto \gamma - 1$ où γ est un générateur topologique de Γ. Les anneaux $\mathcal{B}$ et $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}(\Gamma)$ et $\mathcal{H}(\Gamma)$ sont intègres. On utilise la notion suivante de rang d'un module : le rang d'un module M sur un anneau intègre A est la dimension de $K \otimes_A M$ sur K pour K le corps de fractions de A. Un $\mathcal{H}(G_\infty)$-module M est dit de torsion s'il est de torsion en tant que $\mathcal{H}(\Gamma)$-module, on dit qu'il est de rang r si ses composantes sous l'action de Δ sont toutes de rang r sur $\mathcal{H}(\Gamma)$.

En utilisant un résultat de Cherbonnier et Colmez [**3**], on démontre que $\mathcal{B}[\log x]^{\psi=0}$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{B}(G_\infty)$-module libre et admet comme base les $(1+x)p^{-i}\varphi \log^i x$ pour i entier $\geqslant 0$.

2) Soit $\mathcal{D}$ un (φ, N)-module de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, c'est-à-dire un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un opérateur bijectif φ (Frobenius) et d'un opérateur N (monodromie) vérifiant la relation $N\varphi = p\varphi N$. Soit

$$\mathcal{D}_\infty^{\mathrm{gros}}(\mathcal{D}) = (\mathcal{B}[\log x]^{\psi=0} \otimes \mathcal{D})^{N=0}$$

C'est un $\mathcal{B}(G_\infty)$-module de rang $\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{D}$: il existe une $\mathbb{Q}_p$-application linéaire naturelle de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}_\infty^{\mathrm{gros}}(\mathcal{D})$ donnée par

$$d \longmapsto d^\mu = (1+x)\exp(-p^{-1}\varphi \log x \cdot N)d$$

et $\mathcal{D}_\infty^{\mathrm{gros}}(\mathcal{D}) \cong \mathcal{B}(G_\infty)\mathcal{D}^\mu$.

Pour $* \in \{e, f, g\}$, nous définissons des sous-modules $\mathcal{D}_{\infty,*}(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}_\infty^{\mathrm{gros}}(\mathcal{D})$ sur $\mathcal{H}(G_\infty)$ de rang $\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{D}$. Par exemple, si le noyau de $\varphi - p^j$ sur $\mathcal{D}$ est nul pour tout entier j, les $\mathcal{D}_{\infty,*}(\mathcal{D})$ sont tous égaux au sous-module des éléments de $\mathcal{D}_\infty^{\mathrm{gros}}(\mathcal{D})$ qui appartiennent à l'image de $(\mathcal{B}[\log x] \otimes \mathcal{D})^{N=0}$ par $1 - \Phi$, c'est-à-dire à

$$(1 - \Phi)(\mathcal{B}[\log x] \otimes \mathcal{D})^{\psi=1\otimes\varphi, N=0}$$

(ici, $\Phi = \varphi \otimes \varphi$ et $N = 1 \otimes N + N \otimes 1$).

Les lettres e, f et g ont bien sûr un rapport avec les e, f et g apparaissant dans les définitions de Bloch et Kato [**2**] concernant certains sous-groupes de cohomologie galoisienne.

THÉORÈME A. — *Les $\mathcal{H}(G_\infty)$-modules $\mathcal{D}_{\infty,*}(\mathcal{D})$ sont de type fini, sans torsion et de rang égal à $\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{D}$. De plus, ils admettent une résolution de longueur finie par des modules projectifs de type fini.*

On peut définir le déterminant de tels $\mathcal{H}(G_\infty)$-modules ([**16**], dans la catégorie dérivée des $\mathcal{H}(G_\infty)$-modules, ils sont représentés par un complexe parfait). Nous ne considérerons ici que les déterminants au signe près. Nous examinons aussi les relations entre les modules $\mathcal{D}_{\infty,*}(\mathcal{D})$. Soit $\mathcal{U}(\mathcal{D}) = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}[i](i)$ où $\mathcal{D}[i](i)$ est l'espace vectoriel $\mathcal{D}$ muni de l'opérateur de monodromie de $\mathcal{D}$, de l'opérateur de Frobenius donné par $p^i\varphi$ et de l'action de Galois donnée par le caractère χ^i. On a des suites exactes naturelles de G_∞-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{\infty,e}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{D})^{N=0}/(1-\Phi)\mathcal{U}(\mathcal{D})^{N=0} \longrightarrow 0\ ,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}_{\infty,g}(\mathcal{D}) \longrightarrow (\mathcal{U}(\mathcal{D})/N\mathcal{U}(\mathcal{D}))^{\Phi=p^{-1}} \longrightarrow 0\ ,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{\infty,e}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}_{\infty,g}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{C}_\infty(\mathcal{D}) \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{D})$ est le premier groupe de cohomologie du complexe

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U}(\mathcal{D}) & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathcal{D})\times\mathcal{U}(\mathcal{D}) & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathcal{D}) \\ u & \longmapsto & (Nu,(1-\Phi)u) & & \\ & & (u,v) & \longmapsto & Nv-(1-p\Phi)u\ . \end{array}$$

Enfin, si l'on pose

$$\begin{cases} \mathcal{D}^1_{\infty,g}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_{\infty,g}(\mathcal{D}) \\ \mathcal{D}^2_{\infty,g}(\mathcal{D}) = \mathcal{U}(\mathcal{D})/(N,1-p\Phi)\mathcal{U}(\mathcal{D}) \\ \mathcal{D}^i_{\infty,g}(\mathcal{D}) = 0 \quad \text{pour } i\neq 1,\ 2, \end{cases}$$

et si $0\to\mathcal{D}_1\to\mathcal{D}_2\to\mathcal{D}_3\to 0$ est une suite exacte de (φ,N)-modules, on définit une application de connexion $\mathcal{D}^1_{\infty,g}(\mathcal{D}_3)\to\mathcal{D}^2_{\infty,g}(\mathcal{D}_1)$ et on a une suite exacte longue

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{D}^i_{\infty,g}(\mathcal{D}_1) \longrightarrow \mathcal{D}^i_{\infty,g}(\mathcal{D}_2) \longrightarrow \mathcal{D}^i_{\infty,g}(\mathcal{D}_3) \longrightarrow \ldots$$

3) Soit V une représentation p-adique semi-stable du groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}_p}$ de $\mathbb{Q}_p$. Il lui est associé par la théorie de Fontaine un (φ,N)-module filtré $\mathbf{D}_p(V)$ et donc un $\mathcal{H}(G_\infty)$-module $\mathcal{D}_{\infty,g}(\mathbf{D}_p(V))$. Définissons le module d'Iwasawa $Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p,T)$ associé à V et à $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p$ comme la limite projective des groupes de cohomologie galoisienne $H^1(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n}),T)$ pour T réseau de V stable par $G_{\mathbb{Q}_p}$. C'est un $\mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!]$-module de type fini de rang $\dim V$ dont le sous-module de torsion est isomorphe à $T^{G_{K_\infty}}$. Définissons de même $Z^2_\infty(\mathbb{Q}_p,T)$ comme la limite projective des groupes de cohomologie $H^2(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n}),T)$. Par les théorèmes de dualité de Tate, $Z^2_\infty(\mathbb{Q}_p,T)$ est

isomorphe à $T^*(1)^{G_{K_\infty}}$ à un groupe fini près (voir par exemple [**19**, 3.2.1]). On note $\widetilde{Z}^1_\infty(\mathbb{Q}_p, T) = Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, T)/T^{G_{K_\infty}}$.

Le théorème suivant assure l'existence d'une application exponentielle en théorie d'Iwasawa.

Théorème B.1. — *Soit h un entier $\geqslant 1$ tel que* $\mathrm{Fil}^{-h}\,\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$. *Il existe un homomorphisme naturel injectif de $\mathcal{H}(G_\infty)$-modules*

$$\Omega_{V,h} \,:\, \mathcal{D}_{\infty,g}(\mathbf{D}_p(V)) \longrightarrow \mathcal{H}(G_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!]} \widetilde{Z}^1_\infty(\mathbb{Q}_p, T)\ .$$

Le théorème est bien sûr incomplet. L'application $\Omega_{V,h}$ est caractérisée par une foule de valeurs spéciales reliées aux exponentielles de Bloch-Kato et à leur application duale pour V ou son dual de Tate $V^*(1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, \mathbb{Q}_p(1))$ et ses tordues $V(j) = V \otimes \mathbb{Q}_p(j)$ (voir 5.3.5).

Posons

$$\ell_j = \frac{\log\gamma}{\log\chi(\gamma)} - j$$

où γ est un élément d'ordre infini de G_∞. Notons $\delta_h(\Omega_V)$ le sous-$\mathcal{H}(G_\infty)$-module de rang 1 de l'anneau total des fractions $\mathrm{Frac}(\mathcal{H}(G_\infty))$ de $\mathcal{H}(G_\infty)$, qui est le déterminant de $\Omega_{V,h}$ sur

$$\otimes_{i\in\{1,2\}}\big(\det\mathcal{D}^i_{\infty,g}(\mathbf{D}_p(V))\big)^{(-1)^i} \otimes_{\mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!]} \otimes_{i\in\{1,2\}}\big(\det_{\mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!]} Z^i_\infty(\mathbb{Q}_p, T)\big)^{(-1)^{i+1}}$$

et $\delta_{\mathrm{st}}(V) = \prod_{j>-h} \ell_{-j}^{-\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\,\mathbf{D}_p(V)}\delta_h(\Omega_V)$ (voir [**19**, 3.1.5], si M est un $\mathcal{H}(G_\infty)$-module de torsion de type fini, on utilise l'application canonique

$$\det M \longrightarrow \mathrm{Frac}(\mathcal{H}(G_\infty))\ ;$$

en fait tous les modules de torsion de type fini qui interviennent dans ce texte sont des $\mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!]$-modules (ou $\mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!]$-modules) de type fini annulés par un élément non diviseur de 0 de $\mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!]$ et on a $\det M = \mathcal{H}(G_\infty)\det_{\mathbb{Q}_p\otimes\mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!]} M$ (ou $\det \mathbb{Q}_p \otimes M = \mathcal{H}(G_\infty)\det_{\mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!]} M$).

Théorème B.2
1) $\delta_{\mathrm{st}}(V) = \mathcal{H}(G_\infty)$.
2) *Soient h et $h^* \geqslant 1$ tels que* $\mathrm{Fil}^{-h}\,\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$, $\mathrm{Fil}^{-h^*}\,\mathbf{D}_p(V^*(1)) = \mathbf{D}_p(V^*(1))$. *Si $x \in Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, V)$, $\prod_{-h<j<h^*} \ell_{-j}x$ appartient à l'image de $\mathcal{D}_{\infty,f}(\mathbf{D}_p(V))$ par $\Omega_{V,h}$.*

Ainsi, l'application logarithme $\mathcal{L}_{V,h}$ inverse de $\Omega_{V,h}$ est un homomorphisme de $\mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!]$-modules

$$\mathcal{L}_{V,h} \,:\, Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, V) \longrightarrow \xi_{h,h^*}^{-1}\mathcal{D}_{\infty,f}(\mathbf{D}_p(V)) \subset \xi_{h,h^*}^{-1}\mathcal{D}^{\mathrm{gros}}_\infty(\mathbf{D}_p(V))$$

en posant $\xi_{h,h^*} = \prod_{-h<j<h^*} \ell_{-j}$.

4) On démontre avec ces outils le théorème suivant :