

MÉMOIRES DE LA SMF 106

**PROPRIÉTÉS DE LEFSCHETZ
AUTOMORPHES POUR LES
GROUPES UNITAIRES
ET ORTHOGONAUX**

Nicolas Bergeron

Société Mathématique de France 2006

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

N. Bergeron

Institut de Mathématiques de Jussieu, U.M.R. 7586, Équipe *Analyse Algébrique*,
Université Pierre et Marie Curie, Case 82, 4, place Jussieu,
75252 PARIS CEDEX 05, France.

E-mail : `Nicolas.Bergeron@math.jussieu.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F75, 22E47, 22E55, 11G18, 14G35, 58J50.

Mots clefs. — Variétés arithmétiques, cohomologie des variétés localement symétriques, spectre automorphe, représentations cohomologiques.

PROPRIÉTÉS DE LEFSCHETZ AUTOMORPHES POUR LES GROUPES UNITAIRES ET ORTHOGONAUX

Nicolas Bergeron

Résumé. — Soit $S = S(\Gamma) = \Gamma \backslash X$ une variété arithmétique obtenue comme quotient d'un espace symétrique $X = G(\mathbb{R})/K$ – G étant un groupe semi-simple connexe sur $\mathbb{Q}$, $K \subset G(\mathbb{R})$ un sous-groupe compact maximal – par un sous-groupe arithmétique Γ de $G(\mathbb{Q})$. Si $H \subset G$ est un sous-groupe semi-simple connexe tel que $H(\mathbb{R}) \cap K$ soit un sous-groupe compact maximal, alors $Y = H(\mathbb{R})/H(\mathbb{R}) \cap K$ est un sous-espace symétrique de X . Pour tout $g \in G(\mathbb{Q})$ on peut former la variété arithmétique $S(H, g) = (H(\mathbb{Q}) \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash Y$ et considérer l'immersion naturelle $j_g : S(H, g) \rightarrow S$ induite par l'application $H(\mathbb{A}) \rightarrow G(\mathbb{A})$, $h \mapsto gh$. Supposons G anisotrope ce qui implique que S et $S(H, g)$ sont compactes. Alors, pour tout entier positif k , l'application j_g induit l'application de restriction

$$R_g : H^k(S, \mathbb{C}) \rightarrow H^k(S(H, g), \mathbb{C}).$$

Dans ce Mémoire nous nous concentrons sur le cas des espaces symétriques associés aux groupes orthogonaux et unitaires, $O(p, q)$ et $U(p, q)$; nous démontrons des critères explicites d'injectivité du produit (sur les $g \in G(\mathbb{Q})$) des applications R_g en restriction à la partie fortement primitive (au sens de Vogan et Zuckerman) de la cohomologie. Nous démontrons également des critères explicites d'injectivité de l'application

$$H^k(S(H), \mathbb{C}) \rightarrow H^{k+\dim S - \dim S(H)}(S, \mathbb{C})$$

duale à l'application de restriction R_e .

Les résultats obtenus s'inscrivent naturellement dans une programme conjectural plus large que nous décrivons et auquel on peut penser comme à un analogue automorphe des Théorèmes de Lefschetz classiques sur les variétés projectives. Il est peut-être un peu surprenant qu'une telle analogie subsiste dans le cas de variétés arithmétiques réelles.

La démonstration consiste à réduire les problèmes globaux mentionnés ci-dessus à leurs analogues locaux à l'aide de Théorèmes de Burger et Sarnak et de propriétés d'isolation des représentations cohomologiques dans le dual automorphe. Les méthodes utilisées sont alors essentiellement issues de la théorie des représentations.

Finalement, nous déduisons de ces résultats des applications à la construction de classes de cohomologie non nulles dans certaines variétés arithmétiques.

Abstract (Automorphic Lefschetz properties for unitary and orthogonal groups)

Let G be a connected semisimple group over $\mathbb{Q}$. Given a maximal compact subgroup $K \subset G(\mathbb{R})$ – such that $X = G(\mathbb{R})/K$ is a Riemannian symmetric space – and a convenient arithmetic subgroup $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$, one constructs an arithmetic manifold $S = S(\Gamma) = \Gamma \backslash X$. If $H \subset G$ is a connected semisimple subgroup such that $H(\mathbb{R}) \cap K$ is maximal compact, then $Y = H(\mathbb{R})/H(\mathbb{R}) \cap K$ is a symmetric subspace of X . For each $g \in G(\mathbb{Q})$ one can construct an arithmetic manifold $S(H, g) = (H(\mathbb{Q}) \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash Y$ and a natural immersion $j_g: S(H, g) \rightarrow S$ induced by the map $H(\mathbb{A}) \rightarrow G(\mathbb{A}), h \mapsto gh$. Let us assume that G is anisotropic, which implies that S and $S(H, g)$ are compact. Then, for each positive integer k , the map j_g induces a restriction map

$$R_g: H^k(S, \mathbb{C}) \longrightarrow H^k(S(H, g), \mathbb{C}).$$

In this paper we focus on symmetric spaces associated to the unitary and orthogonal groups, namely $O(p, q)$ and $U(p, q)$, and give explicit criterions for the injectivity of the product of the maps R_g (for g running through $G(\mathbb{Q})$) when restricted to the strongly primitive (in the sense of Vogan and Zuckerman) part of the cohomology. We also give explicit criterions for the injectivity of the map

$$H^k(S(H), \mathbb{C}) \longrightarrow H^{k+\dim S - \dim S(H)}(S, \mathbb{C})$$

dual to the restriction map R_e .

The results we obtain fit into a larger conjectural picture that we describe and which bears a strong analogy with the classical Lefschetz Theorems. This may sound quite surprising that such an analogy still exists in the case of the real arithmetic manifolds.

We reduce the global problems mentioned above to local ones by using Theorems of Burger and Sarnak and isolation properties of cohomological representations in the automorphic dual. The methods used then are mainly representation-theoretic.

We finally derive some applications concerning the non vanishing of some cohomology classes in arithmetic manifolds.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Représentations cohomologiques	11
2.1. Le cas des groupes unitaires	13
2.2. Le cas des groupes orthogonaux	17
2.3. Restriction entre K -types	24
3. Théorème 1.3 et cohomologie L^2	27
3.1. Démonstration du Théorème 1.3	27
3.2. Un calcul de cohomologie L^2	29
3.3. Rappels sur les séries discrètes de G/H	31
3.4. Construction de la forme harmonique	34
3.5. Démonstration du Théorème 3.4	36
3.6. Application aux groupes unitaires et orthogonaux	42
4. Isolation des représentations cohomologiques	49
4.1. Isolation dans le dual unitaire	49
4.2. Isolation sous la condition $d = 0$	55
4.3. Isolation dans le dual automorphe	57
5. Restriction des représentations cohomologiques	59
5.1. Restriction et séries discrètes	59
5.2. Restriction de représentations cohomologiques	63
5.3. Produits tensoriels de représentations cohomologiques	67
5.4. Représentations cohomologiques discrètement décomposables	69
6. Géométrie de l'espace symétrique associé au groupe $O(p, q)$	75
6.1. Préliminaires	75
6.2. Sous-espaces totalement géodésiques	76
6.3. Croissance du volume	80
6.4. Fonction distance à l'hypersurface	85

6.5. Séries de Poincaré	87
6.6. Tours de revêtements finis	91
7. Calcul de la cohomologie L^2	97
7.1. Une proposition de Donnelly et Xavier	97
7.2. Cohomologie L^2 relative	99
7.3. Démonstration du Théorème 7.1	101
8. Démonstration des principaux résultats	103
8.1. Autour d'un Théorème de Burger et Sarnak	103
8.2. Restriction et cup-produit virtuels	105
8.3. L'application « cup-produit avec $[Sh^0H]$ »	108
8.4. Applications	112
8.5. Sur la classe de cohomologie des symboles modulaires	113
9. Généralisations et Perspectives	115
9.1. Généralisations	115
9.2. Perspectives	119
Bibliographie	121

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Rappelons que si M est une variété projective de dimension complexe n , l'étude des groupes de cohomologie complexes⁽¹⁾ $H^*(M)$ de degré $*$ $\neq n$ peut se réduire à l'étude des groupes de cohomologie d'une variété projective de dimension strictement plus petite. Plus précisément, Lefschetz a démontré le célèbre résultat suivant.

THÉORÈME DE LEFSCHETZ. — *Soit H un hyperplan générique de l'espace projectif ambiant. Alors,*

1. *l'application naturelle de restriction*

$$H^i(M) \longrightarrow H^i(M \cap H)$$

*est **injective** pour $i \leq n - 1$, et*

2. *l'application naturelle « cup-produit avec $[M \cap H]$ »*

$$H^i(M \cap H) \longrightarrow H^{i+2}(M)$$

*est **injective** pour $i \leq n - 2$.*

Le but de cet article (qui est un prolongement de [2]) est de décrire un phénomène analogue au Théorème de Lefschetz dans le monde automorphe et pour les groupes unitaires et orthogonaux (*i.e.* pour les variétés arithmétiques associées aux groupes $U(p, q)$ ou $O(p, q)$).

Définitions des objets. — Dans tout le texte nous désignerons par G un groupe algébrique réductif, connexe et **anisotrope** sur $\mathbb{Q}$. Les adèles $\mathbb{A}$ de $\mathbb{Q}$ forment un anneau localement compact, dans lequel $\mathbb{Q}$ se plonge diagonalement comme un sous-anneau. On peut considérer le groupe $G(\mathbb{A})$ des points adéliques de G , qui contient $G(\mathbb{Q})$ comme sous-groupe discret.

Nous supposons, pour simplifier et toujours dans tout le texte, que le groupe réductif G est presque simple sur $\mathbb{Q}$ modulo son centre. Autrement dit, il n'a pas

⁽¹⁾Tous les groupes de cohomologie considérés dans cet article sont à coefficients complexes.

de sous-groupe distingué, non central et connexe défini sur $\mathbb{Q}$. Il découle de cette hypothèse que tous les facteurs simples de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ de G (modulo son centre) sont isomorphes. Nous supposons de plus que le groupe $G(\mathbb{R})$ des points réels est le produit (avec intersection finie) d'un groupe compact et d'un groupe réel non compact qui est *presque simple* modulo son centre que l'on suppose compact. Nous notons ce dernier groupe G^{nc} (nc signifie ici non compact), et nous le supposons généralement isomorphe soit au groupe $U(p, q)$ soit au groupe $O(p, q)$.

Un *sous-groupe de congruence* de $G(\mathbb{Q})$ est un sous-groupe de la forme $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$, où K_f est un sous-groupe compact ouvert du groupe $G(\mathbb{A}_f)$ des points adéliques finis de G . Soient $X_G = G(\mathbb{R})/K_\infty$ l'espace symétrique associé au groupe G , où $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal, et d_G la dimension réelle de X_G .

Dans cet article on étudie les quotients (compacts, puisque G est anisotrope⁽²⁾) $\Gamma \backslash X_G$, où $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ est un sous-groupe de congruence; ces quotients s'identifient aux composantes connexes de $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})/K_\infty K_f = G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G(\mathbb{A}_f))/K_f$, où $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe compact ouvert. Précisément, désignons par G_f l'adhérence de $G(\mathbb{Q})$ dans le groupe $G(\mathbb{A}_f)$. Un sous-groupe de congruence $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ s'écrit $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$ où K_f est l'adhérence de Γ dans G_f et,

$$(1.1) \quad \Gamma \backslash X_G = G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G_f)/K_f.$$

Plus exactement, on s'intéresse ici à la cohomologie (à coefficients complexes) $H^*(\Gamma \backslash X_G)$ de ces quotients.

Une fois donnés deux sous-groupes de congruence $\Gamma' \subset \Gamma \subset G(\mathbb{Q})$, on obtient un revêtement fini

$$\Gamma' \backslash X_G \longrightarrow \Gamma \backslash X_G$$

qui induit un morphisme injectif

$$H^*(\Gamma \backslash X_G) \longrightarrow H^*(\Gamma' \backslash X_G)$$

en cohomologie. Les groupes de cohomologies $H^*(\Gamma \backslash X_G)$ (ou $H^*(G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G_f)/K_f)$) forment donc un système inductif indexé par les sous-groupes de congruence $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ (ou par les sous-groupes compacts ouverts $K_f \subset G_f$). En passant à la limite (inductive) on définit

$$(1.2) \quad H^*(Sh^0 G) = \lim_{\overline{\Gamma}} H^*(\Gamma \backslash X_G) = \lim_{\overline{K_f}} H^*(G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G_f)/K_f).$$

La notation ci-dessus provient de ce que lorsque l'espace X_G est hermitien, on appelle *variété de Shimura* l'espace topologique

$$(1.3) \quad Sh^0 G = \lim_{\overline{\Gamma}} \Gamma \backslash X_G = G(\mathbb{Q}) \backslash (X \times G_f).$$

Cet espace est en tout cas toujours bien défini et est un espace topologique dont on peut considérer la cohomologie de Čech et il est de plus démontré dans [47] que

⁽²⁾Sauf dans la dernière partie où nous discuterons du cas isotrope.

sa cohomologie coïncide avec (1.2). Pour ce qui nous concerne, il sera suffisant de considérer que $H^*(Sh^0 G)$ n'est qu'une notation pour la limite inductive (1.2).

L'application de restriction et son application duale. — Soit $H \subset G$ un sous-groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{Q}$. On suppose que

$$(1.4) \quad H(\mathbb{R}) \cap K_\infty \text{ est un sous-groupe compact maximal de } H(\mathbb{R}).$$

Il existe alors une involution de Cartan θ de G dont la restriction à H est une involution de Cartan de $H(\mathbb{R})$. On a une décomposition correspondante

$$(1.5) \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{k}_H \oplus \mathfrak{p}_H$$

avec $\mathfrak{p}_H = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$.

Considérons maintenant $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$ un sous-groupe de congruence sans torsion de $G(\mathbb{Q})$. Le quotient $S(\Gamma) = \Gamma \backslash X_G$ est une variété compacte qui s'identifie à $S(K_f) = G(\mathbb{Q}) \backslash (X \times G_f) / K_f$.

Soit $K_f^H \subset H(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert. Si $K_f^H \subset K_f$, il existe une application naturelle $j : S(K_f^H) \rightarrow S(K_f)$. Puisque Γ est sans torsion, l'application j est finie et non ramifiée. On rappelle le résultat suivant, dû à Deligne [14].

LEMME 1.1. — *Étant donné $K_f^H \subset H(\mathbb{A}_f)$, il existe un sous-groupe compact ouvert $K_f^1 \subset G(\mathbb{A}_f)$ avec $K_f^H \subset K_f^1$, tel que l'application naturelle $j' : S(K_f^H) \rightarrow S(K_f^1)$ soit injective.*

En particulier, si l'on prend $K_f^H = K_f \cap H(\mathbb{A}_f)$, on obtient une application naturelle finie $j : S(K_f^H) \rightarrow S(K_f)$. Si l'on remplace K_f par un sous-groupe suffisamment petit K_f^1 , on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} S(K_f^H) & \xrightarrow{j'} & S(K_f^1) \\ & \searrow j & \downarrow \pi \\ & & S(K_f) \end{array}$$

où π est la projection naturelle de revêtement et j' est injective.

En passant à la limite (inductive) sur les K_f , les applications j induisent l'application de restriction

$$(1.6) \quad \text{res}_H^G : H^*(Sh^0 G) \longrightarrow H^*(Sh^0 H).$$

Pour simplifier la lecture nous utiliserons la notation $Sh^0 H \subset Sh^0 G$ pour résumer que H est un sous-groupe algébrique réductif, connexe, presque simple modulo son centre compact et vérifiant la condition (1.4).

L'application duale à l'application de restriction induite par j

$$H^*(S(K_f^H)) \longrightarrow H^*(S(K_f))$$

induit, en passant à la limite (inductive) sur les K_f , l'application

$$(1.7) \quad \bigwedge_H^G : H^*(Sh^0 H) \longrightarrow H^{*+d_G-d_H}(Sh^0 G)$$

« cup-produit avec $[Sh^0 H]$ » (duale à (1.6)).

Nous aurons besoin de considérer également une modification de l'application de restriction : l'application de restriction virtuelle. Expliquons sa construction. Soit $g \in G(\mathbb{Q})$. Fixons K_f^H un compact ouvert de $H(\mathbb{A}_f)$, et considérons l'application $j_g : X_H \times H_f \rightarrow X_G \times G_f$ donnée par $j_g(x, h) = (gx, h)$. Il est facile de vérifier que j_g induit une application injective $H(\mathbb{Q}) \backslash (X_H \times H_f) / K_f^H \rightarrow G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G_f) / K_f^H$. En supposant que $K_f^H = K_f \cap H(\mathbb{A}) \subset K_f$ (où K_f est un sous-groupe compact ouvert dans $G(\mathbb{A}_f)$), on obtient alors une application naturelle $j_g : S(K_f^H) \rightarrow S(K_f)$, en utilisant les notations précédentes. Puisque Γ est sans torsion, cette application est finie et non ramifiée. On peut également décrire j_g comme l'application naturelle $(H(\mathbb{R}) \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash X_H \rightarrow \Gamma \backslash X_G$. On obtient de cette manière toute une famille, paramétrée par $g \in G(\mathbb{Q})$, de sous-variétés de $\Gamma \backslash X_G$ – les images des applications j_g . En cohomologie celles-ci induisent l'application de *restriction virtuelle*

$$H^*(S(\Gamma)) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^*(S_H(g)),$$

où $S_H(g) = (H(\mathbb{R}) \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash X_H$, et l'application de restriction est déduite de la famille d'applications (j_g) . En passant à la limite (inductive) sur les Γ , l'application de restriction virtuelle induit l'application de *restriction virtuelle* Res_H^G :

$$(1.8) \quad \text{Res}_H^G : H^*(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0 H).$$

Une Conjecture tirée de [2]. — Dans [2] nous avons énoncé la conjecture suivante et montré qu'elle pouvait être déduite de conjectures classiques sur le spectre automorphe des groupes semi-simples (Conjectures d'Arthur).

CONJECTURE 1.2. — *Supposons fixées des données $Sh^0 H \subset Sh^0 G$ avec $H^{\text{nc}} = O(k, 1)$ (resp. $U(k, 1)$) et $G^{\text{nc}} = O(n, 1)$ (resp. $U(n, 1)$), où $n \geq k \geq 1$ sont des entiers. Alors,*

1. *pour tout entier $i \leq d_H/2$, l'application de restriction virtuelle*

$$\text{Res}_H^G : H^i(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^i(Sh^0 H)$$

est injective ;

2. *pour tout entier $i \leq d_H - d_G/2$, l'application « cup-produit avec $[Sh^0 H]$ »*

$$\bigwedge_H^G : H^i(Sh^0 H) \longrightarrow H^{i+d_G-d_H}(Sh^0 G)$$

est injective.