Deux « puzzles de Pythagore »

• F. Pène

L'objectif de cette activité est de voir le théorème de Pythagore sous la forme de puzzles, en lien avec la notion d'aire. Cette activité utilise la notion de triangle rectangle [a] et l'aire d'un carré. Cette animation est diffusée depuis une vingtaine d'année dans le « petit livret mathémagique brestois ».

a. On pourra définir un triangle rectangle comme un triangle avec un angle droit, ou encore comme un « demi-rectangle » auprès des enfants connaissant juste les angles droits ou les rectangles.

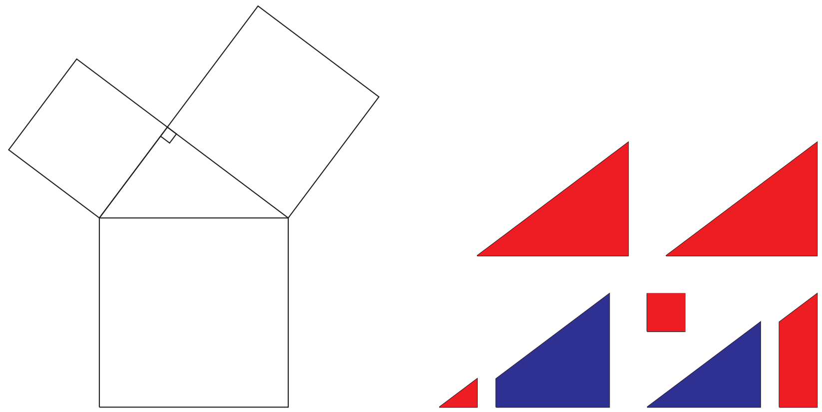
Durée : 15 à 30 minutes.
Niveau : CE1-CE2.
Matériel : avoir fabriqué les pièces du puzzle et le support avant l'activité soit d'une manière un peu solide comme indiqué ci-dessous, soit en plusieurs exemplaires en papier (qui peuvent être donnés aux participant-es).

Un puzzle « difficile » avec 7 pièces (grand succès-tout public)

On dispose d'une feuille (ou une planche d'isorel) sur laquelle on a dessiné un triangle rectangle avec « ses 3 carrés » et on dispose de 7 pièces (en carton plume par exemple) : 2 bleues, 5 rouges (conseil : mettre un signe distinctif, peinture ou pastille, sur la face visible des pièces pour éviter que les personnes retournent les pièces face contre la table, ce qui complique le puzzle).

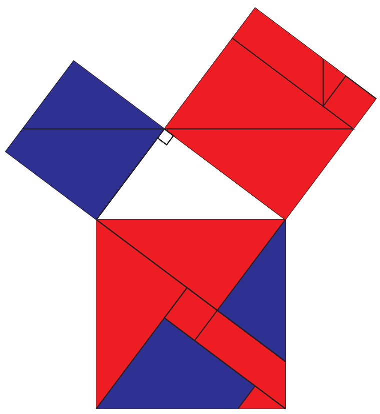
– Étape 1 : on demande de faire le puzzle du petit carré avec les 2 pièces bleues, puis de faire le puzzle du moyen carré avec les 5 pièces rouges,
– Étape 2 : on explique que le théorème de Pythagore dit que dans un triangle rectangle (= demi-rectangle) l'aire du grand carré est égale à l'aire du petit carré + l'aire du moyen carré et on demande de vérifier cela en prenant toutes les pièces (bleues et rouges) des petit et moyen carrés pour faire le puzzle du grand carré.

FIGURE 1 – Support et pièces



Construction des pièces du puzzle pour le triangle rectangle $a \leqslant b < c$: un carré de côté $b - a$, 4 triangles rectangles de côtés a, b, c, couper deux triangles a, b, c parallèlement au côté de longueur a : l'un à une distance a de ce côté, et le second à une distance $b - a$ de ce côté (si $a = b$, le puzzle est juste constitué de 4 triangles rectangles).

FIGURE 2 – Solutions du premier puzzle



Aide pour faire le puzzle du grand carré : conseiller de ne pas retourner les pièces face contre la table (le puzzle est assez compliqué comme ça !) ; selon les besoins, on peut : dire qu'il ne faut pas mettre les angles droits des pièces dans les angles droits du grand carré ; faire remarquer que certaines pièces du puzzle sont des triangles rectangles (de mêmes dimensions que le triangle du dessin : on peut les poser dessus pour le vérifier) et donc que la longueur de leur plus grand côté est égale à la longueur du côté du grand carré ; conseiller de placer l'hypothénuse des triangles rectangles sur les côtés du carrés et d'essayer de faire cela sur chaque côté en reconstituant 4 triangles rectangles ; indiquer les pièces qui sont bien placées.

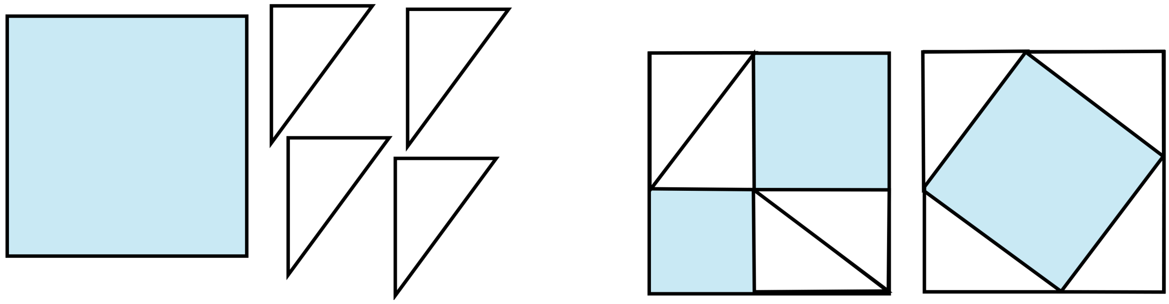
La solution du puzzle consiste à reconstituer sur chaque côté un triangle rectangle (et mettre le petit carré au milieu)

Puzzle de Pythagore en négatif

On visualise le théorème de Pythagore en posant 4 triangles rectangles blancs de « petits côtés » a et b et d'hypothénuse c sur un carré bleu de côté $a + b$.

– on demande d'abord de poser les 4 triangles de manière à faire apparaître en bleu un carré de côté a et un carré de côté b. (ce qui fait apparaître l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$),
– on demande ensuite de poser les 4 triangles de manière à faire apparaître en bleu un carré de côté l'hypothénuse c.

Figure 3 – Puzzle en négatif : support et pièces (à gauche) ; solutions (à droite)



Compléments

Et bien sûr on pourra citer le quatrain de Franc Nohain
« *Le carré de l'hypothénuse*
Est égal, si je ne m'abuse
À la somme des carrés
Construits sur les deux autres côtés »,

parler de la réciproque du théorème de Pythagore et on pourra parler du triangle rectangle le plus célèbre de côtés 3, 4 et 5 (ou 15, 20 et 25) utilisé depuis l'antiquité par exemple pour construire des murs bien perpendiculaires.