

SÉMINAIRES ET CONGRÈS 14

THÉORIES ASYMPTOTIQUES ET  
ÉQUATIONS DE PAINLEVÉ

ANGERS, JUIN 2004

édité par

Éric Delabaere

Michèle Loday-Richaud

Société Mathématique de France 2006

*E. Delabaere*

Université d'Angers, UFR des Sciences, Département de Mathématiques,  
2, boulevard Lavoisier, 49045 Angers Cedex.

*E-mail* : `eric.delabaere@univ-angers.fr`

*M. Loday-Richaud*

Université d'Angers, UFR des Sciences, Département de Mathématiques,  
2, boulevard Lavoisier, 49045 Angers Cedex.

*E-mail* : `michele.loday@univ-angers.fr`

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — Primaire 12H05, 12H10, 13B05, 14D20, 17B65, 30E05, 30E99, 33D10, 33E17, 34M15, 34M55, 34M60, 37J30, 39A10, 39A13, 39A20, 39B22, 40G10, 58H05; Secondaire 14E07, 14H52, 14N20, 32G34, 32S40, 33E17, 34E20, 34M35, 34M40, 34M55, 37J35.

**Mots clefs.** — Connexion parabolique stable, coordonnées canoniques, coordonnées de Darboux, correspondance de Riemann-Hilbert, déformation isomonodromique, dessins d'enfant, équations aux  $q$ -différences, équations de Painlevé, équations de Painlevé discrètes, équations de Painlevé d'ordre supérieur, équations de Schlesinger, espace de modules, espace des configurations, flot isomonodromique, flot de Painlevé, flot de Riccati, fonction algébrique, fonction elliptique, fonction hyperelliptique, fonction thêta, groupe de tresses, groupe de Weyl affine, groupe modulaire, systèmes hamiltoniens, hamiltonien de Hénon-Heiles, hiérarchies, intégrabilité, méthode de conjugaison, points tournants simples de première espèce, réflexions complexes, relations de contiguïté, résolution des singularités, séparation de variables, singularité simple, solutions platoniques, solutions sans paramètre, sommabilité, surface cubique, symétries d'Okamoto, systèmes de Noumi-Yamada, théorème de réduction locale, transformation de Bäcklund, transformation de Cremona, transformation de Schlesinger, théorie de Galois, groupe de Galois différentiels.

---

# THÉORIES ASYMPTOTIQUES ET ÉQUATIONS DE PAINLEVÉ

ANGERS, JUIN 2004

édité par **Éric Delabaere, Michèle Loday-Richaud**

**Résumé.** — Dans ce volume, une large place est accordée à diverses approches de l'équation de Painlevé VI : représentation elliptique, classification des solutions algébriques et déformations de « dessins d'enfants », symétries du groupe de Weyl affine, étude dynamique par des techniques de théorie de Riemann-Hilbert et de géométrie algébrique.

Sont aussi étudiées les équations de Painlevé discrètes et des équations d'ordre supérieur incluant la hiérarchie mKdV et sa paire de Lax et une analyse WKB de systèmes de Noumi-Yamada perturbés.

On y trouve enfin des fondements théoriques en théorie de Galois pour les équations différentielles linéaires et non linéaires, les équations aux différences et aux  $q$ -différences et des applications aux équations de Painlevé et à l'intégrabilité ou la non intégrabilité de certains systèmes hamiltoniens.

**Abstract (Asymptotic theories and Painlevé equations).** — The major part of this volume is devoted to the study of the VI<sup>th</sup> Painlevé equation through a variety of approaches, namely elliptic representation, the classification of algebraic solutions and so-called “dessins d'enfants” deformations, affine Weyl group symmetries and dynamics using the techniques of Riemann-Hilbert theory and those of algebraic geometry.

Discrete Painlevé equations and higher order equations including the mKdV hierarchy and its Lax pair and a WKB analysis of perturbed Noumi-Yamada systems are given a place of study, as well as theoretical settings in Galois theory for linear and non-linear differential equations, difference and  $q$ -difference equations with applications to Painlevé equations and to integrability or non-integrability of certain Hamiltonian systems.



## TABLE DES MATIÈRES

<b>Résumés des articles</b> .....	ix
<b>Abstracts</b> .....	xv
<b>Preface</b> .....	xxi
<b>Acknowledgements</b> .....	xxv
P. BOALCH — <i>Six results on Painlevé VI</i> .....	1
1. Background .....	1
2. Affine Weyl group symmetries .....	6
3. Special solutions .....	15
References .....	18
P.A. CLARKSON — <i>Special Polynomials Associated with Rational and Algebraic Solutions of the Painlevé Equations</i> .....	21
1. Introduction .....	22
2. Special Polynomials Associated with Rational Solutions of $P_{II}$ .....	24
3. Special Polynomials Associated with Rational Solutions of $P_{III}$ .....	27
4. Special Polynomials Associated with Rational Solutions of $P_{IV}$ .....	31
5. Special Polynomials Associated with Algebraic Solutions of $P_{III}$ .....	39
6. Special Polynomials Associated with Algebraic solutions of $P_V$ .....	42
7. Interlacing of roots? .....	44
8. Discussion .....	47
Acknowledgements .....	48
References .....	48
P.A. CLARKSON, N. JOSHI & M. MAZZOCCO — <i>The Lax pair for the mKdV Hierarchy</i> .....	53
1. Introduction .....	53
2. The Natural Lax Pair for the mKdV Hierarchy .....	56
3. The Natural Isomonodromic Problem for the $P_{II}$ Hierarchy. ....	58