

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PIERRE BERTHELOT

***D*-modules arithmétiques. II : descente par Frobenius**

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 81 (2000)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_2000_2_81__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

$\mathscr{D}$ -MODULES ARITHMÉTIQUES II DESCENTE PAR FROBENIUS

Pierre Berthelot

Résumé. — En géométrie algébrique, sans hypothèse de caractéristique, la théorie des modules sur des anneaux d'opérateurs différentiels convenables, appelés d'une manière générique « $\mathscr{D}$ -modules », est un outil essentiel pour l'étude de la cohomologie de de Rham et des cohomologies qui en dérivent (cristalline, rigide). Dans ce mémoire, nous étudions plus particulièrement les propriétés spécifiques de l'action d'un relèvement du morphisme de Frobenius sur la catégorie des $\mathscr{D}$ -modules, lorsque la base est un schéma annulé par une puissance d'un nombre premier p fixé, ou un schéma formel p -adique. Le résultat principal est un théorème de descente par Frobenius, grâce auquel l'étude des modules munis d'une action des opérateurs différentiels usuels d'ordre $\leq p^m$ se ramène à celle des modules munis d'une action des dérivations. Nous établissons la compatibilité de cette descente à toutes les opérations cohomologiques de la théorie des $\mathscr{D}$ -modules, ce qui montre que tout $\mathscr{D}$ -module d'origine géométrique peut être muni en un sens convenable d'une action naturelle de Frobenius, et nous en donnons diverses applications.

Abstract (Arithmetic $\mathscr{D}$ -modules II. Frobenius descent). — In algebraic geometry, regardless of the characteristic, the theory of modules over suitable rings of differential operators, generically called “ $\mathscr{D}$ -modules”, is an essential tool in the study of de Rham cohomology and other theories deriving from it (crystalline and rigid cohomologies). In this memoir, we study more specifically the particular properties of the action of a lifting of the Frobenius morphism on the category of $\mathscr{D}$ -modules, when the base is a scheme annihilated by a power of a fixed prime p , or a p -adic formal scheme. The main result is a descent theorem for the Frobenius morphism, allowing to reduce the study of modules endowed with an action of usual differential operators of order $\leq p^m$ to that of modules endowed with an action of derivations. We prove the compatibility of this descent with all cohomological operations from $\mathscr{D}$ -module theory, which shows that any $\mathscr{D}$ -module of geometric origin can be endowed in a suitable sense with a natural Frobenius action, and we give some applications.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Conventions générales	5
1. $\mathcal{D}$-modules à droite	7
1.1. Interprétation infinitésimale des $\mathcal{D}$ -modules à droite	8
1.2. Action par l'opérateur adjoint	17
1.3. Isomorphismes de transposition	24
2. Théorèmes de descente	31
2.1. Foncteur image inverse	31
2.2. Élévation du niveau par Frobenius	37
2.3. Descente par Frobenius	47
2.4. Cas des $\mathcal{D}$ -modules à droite	58
2.5. Un foncteur quasi-inverse	62
2.6. Relation avec la descente de Cartier	67
3. Théorèmes de commutation à l'action de Frobenius	71
3.1. Extension de l'anneau d'opérateurs	72
3.2. Changement de base et image inverse extraordinaire	75
3.3. Produits tensoriels interne et externe	79
3.4. Image directe	81
3.5. Foncteur dual	85
4. F-$\mathcal{D}^\dagger$-modules	87
4.1. Descente des $\widehat{\mathcal{D}}_x^{(m)}$ -modules	88
4.2. Descente des $\mathcal{D}_x^\dagger$ -modules	93
4.3. Action de Frobenius sur la cohomologie de de Rham	97
4.4. Dimension homologique	101
4.5. Descente des F - $\mathcal{D}_{x,\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules	106
4.6. Relation avec les F -isocristaux	115
Appendice : Filtration m-PD-adique	125
Bibliographie	133

INTRODUCTION

Dans ce mémoire, nous poursuivons l'étude de la théorie des $\mathcal{D}$ -modules sur des bases « arithmétiques » (en caractéristique p , en inégale caractéristique,...), commentée dans [5]. Notre objectif est ici d'analyser certaines propriétés spécifiques aux $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -schémas, ou aux schémas formels sur une base p -adique, liées à l'action de Frobenius.

Pour un schéma X propre et lisse sur un corps parfait k de caractéristique p , une différence essentielle entre la cohomologie cristalline et la cohomologie ℓ -adique pour $\ell \neq p$ se situe au niveau de l'action de Frobenius : sur les groupes $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}_\ell)$, c'est un isomorphisme, alors que c'est seulement une isogénie sur les groupes $H_{\text{cris}}^i(X/W(k), \mathcal{O}_{X/W})$. Bien sûr, ce comportement particulier n'est pas un défaut, mais est au contraire à la base de nombreuses applications spécifiques à la cohomologie cristalline, et est en réalité l'une des propriétés qui en font tout l'intérêt.

Nous examinons ici une propriété de même nature, au niveau des catégories de coefficients : alors que l'image inverse par le morphisme de Frobenius est une équivalence de la catégorie des faisceaux étales sur X avec elle-même [SGA4, VIII, 1.1], il n'en est pas de même pour la catégorie des cristaux. Le premier résultat qui met en évidence ce type de phénomène est probablement le théorème classique de Cartier ([14], [15]) sur la descente par Frobenius des $\mathcal{O}_X$ -modules munis d'une connexion intégrable à p -courbure nulle : si S est un schéma de caractéristique p , X un S -schéma lisse, $F : X \rightarrow X'$ le morphisme de Frobenius de X relativement à S , l'image inverse $\mathcal{E} = F^*\mathcal{E}'$ d'un $\mathcal{O}_{X'}$ -module $\mathcal{E}'$ est munie d'une connexion intégrable canonique, qui est à p -courbure nulle, et le foncteur F^* établit une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{O}_{X'}$ -modules et celle des $\mathcal{O}_X$ -modules munis d'une connexion intégrable à p -courbure nulle [29, th. 5.1].

Lorsque $\mathcal{E}'$ est lui-même muni d'une connexion intégrable ∇' , l'image inverse de ∇' par F n'est autre que la connexion canonique à p -courbure nulle de $\mathcal{E}$. On pourrait donc avoir l'impression que toute information relative à ∇' a été perdue en prenant l'image inverse par F . Une conséquence des résultats de ce mémoire est qu'il n'en est rien. Pour garder trace de la connexion ∇' , il faut utiliser la famille de faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_X^{(m)}$ construite dans [5]. Rappelons que le faisceau $\mathcal{D}_X^{(0)}$ est engendré librement sur $\mathcal{O}_X$ par les dérivations, que la donnée d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -module à gauche sur un $\mathcal{O}_X$ -module équivaut à celle d'une connexion intégrable, et que

les faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ forment un système inductif dont la limite est le faisceau $\mathcal{D}_X$ des opérateurs différentiels usuels [EGA, IV, (16.8.1)]. Dans la présente situation, nous montrerons que la structure de $\mathcal{D}_{X'}^{(0)}$ -module à gauche de $\mathcal{E}'$ permet de munir $F^*\mathcal{E}'$ d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_X^{(1)}$ -module à gauche, et notre théorème de descente 2.3.6 entraînera que le foncteur F^* induit une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{D}_{X'}^{(0)}$ -modules à gauche et celle des $\mathcal{D}_X^{(1)}$ -modules à gauche. C'est cet énoncé qu'on peut considérer comme l'analogue cristallin (de caractéristique p) du théorème d'invariance par F^* du topos étale.

Le théorème de descente par Frobenius 2.3.6, qui est au cœur de ce mémoire, se situe dans un contexte plus général qui permet de remonter de la caractéristique p à une situation d'inégales caractéristiques. Nous nous plaçons en effet sur un schéma S annulé par une puissance de p , sur lequel est donné un idéal $\mathfrak{a}$ contenant p et muni d'une structure partielle d'idéal à puissances divisées de niveau m . Si X est un S -schéma lisse, de réduction X_0 sur $S_0 = V(\mathfrak{a})$, et si $F : X \rightarrow X'$ est un morphisme de S -schémas lisses relevant une puissance F_{X_0/S_0}^s du morphisme de Frobenius relatif, nous montrons d'abord que, pour tout $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$ -module à gauche $\mathcal{E}'$, $F^*\mathcal{E}'$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$ -module à gauche, puis que le foncteur F^* induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$ -modules à gauche et $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$ -modules à gauche. La démonstration procède par réduction au théorème de descente fidèlement plate pour le morphisme F , grâce à l'interprétation des structures de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche en termes de stratifications [5].

Nous donnons ensuite en 2.5.6 une construction d'un foncteur quasi-inverse à F^* qui se révèle d'une grande utilité. Pour cela, nous établissons pour les $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules à droite un théorème de descente analogue au précédent, en considérant le foncteur $F^\flat$ défini par $F^\flat \mathcal{M} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})$, introduit par Grothendieck et Hartshorne pour la théorie de la dualité pour les $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents [27]. Nous utilisons ici une interprétation infinitésimale de la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à droite en termes de « costratifications » (cf. 1.1.3), qui constitue l'analogue pour les modules à droite de la notion de stratification pour les modules à gauche. Cette interprétation est développée dans la première partie du mémoire ; en caractéristique nulle, elle est probablement connue des spécialistes, mais elle ne semble pas figurer dans la littérature. Sur un schéma de base quelconque, elle permet de munir le faisceau ω_X des différentielles de degré maximum sur X d'une structure de $\mathcal{D}_X$ -module à droite, grâce à la théorie du foncteur image inverse extraordinaire $f^!$ pour les $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents développée dans [27]. Le théorème 1.2.3 montre que la structure ainsi définie de manière intrinsèque s'explicite en coordonnées locales par la formule usuelle de l'action par l'opérateur adjoint.

Rappelons que, pour $m \geq 1$, les faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ ne sont pas engendrés par les dérivations, de sorte que munir un $\mathcal{O}_X$ -module d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module est en général plus délicat qu'en caractéristique nulle ; le recours à l'interprétation en termes

de stratifications et costratifications est alors souvent la manière naturelle de procéder. C'est donc aussi de cette manière que nous définissons dans la première partie des structures de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules (à droite ou à gauche selon les cas) sur les produits tensoriels et les modules d'homomorphismes. À l'aide de la structure de $\mathcal{D}_X$ -module à droite construite sur ω_X , on en déduit le procédé habituel de passage des $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules à gauche aux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules à droite, et réciproquement, par tensorisation avec ω_X ou ω_X^{-1} .

Après avoir établi les théorèmes de descente dans la deuxième partie, nous consacrons la troisième partie de ce mémoire à montrer la compatibilité du foncteur F^* aux opérations cohomologiques de base de la théorie des $\mathcal{D}_X$ -modules, généralisées ici aux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules. Les conventions et notations que nous employons sont celles de Bernstein et Borel [12]. Si les cas de l'image inverse $f^!$ et du produit tensoriel externe résultent facilement des propriétés de fonctorialité de F^* , celui de l'image directe f_+ est plus intéressant, et constitue une application du théorème de descente par Frobenius (cf. 3.4.4). Il en est de même pour le cas du foncteur de dualité locale, dû à Virrion, pour lequel nous renvoyons à [42]. Une autre propriété importante établie ici est la commutation de F^* aux extensions du faisceau d'opérateurs différentiels au moyen des homomorphismes $\mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_X^{(m')}$, pour $m' \geq m$, qui servira dans la dernière partie pour redescendre les $F\text{-}\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules. Toutes ces compatibilités sont essentielles pour assurer la permanence de l'action de Frobenius à travers toutes les opérations cohomologiques ; elles entraîneront que tout $\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^\dagger$ -module d'origine géométrique est muni d'une structure naturelle de $F\text{-}\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^\dagger$ -module [7].

Signalons aussi que les différents résultats mentionnés ici sont en fait établis sous des hypothèses un peu plus générales :

(a) Lorsque l'on suppose que la PD-structure donnée sur $\mathfrak{a}$ est m -PD-nilpotente, il n'est pas nécessaire de disposer d'un relèvement F de Frobenius globalement sur X pour définir le foncteur F^* et établir ses propriétés. On peut en effet utiliser la technique cristalline standard pour recoller au moyen d'une stratification les images inverses définies par des relèvements locaux de Frobenius.

(b) Nous avons systématiquement utilisé des faisceaux d'opérateurs différentiels déduits des faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ par extension des coefficients à une $\mathcal{O}_X$ -algèbre sur laquelle $\mathcal{D}_X^{(m)}$ opère. Rappelons qu'une des motivations pour l'introduction de cette généralité supplémentaire — qui n'offre pas d'autre difficulté que l'alourdissement des énoncés qui en résulte — est de pouvoir obtenir des résultats sur les algèbres de fonctions à singularités surconvergentes, et sur les modules sur ces algèbres, par réduction modulo p^n et passages à la limite. Le lecteur trouvera dans [6] un exemple de l'utilisation de ces techniques, pour prouver le théorème de cohérence sur $\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^\dagger$ d'un tel faisceau d'algèbres.

Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques, d'indice de ramification e , de corps résiduel parfait k , et m un entier tel que l'on ait

$p^m(p-1) \geq e$. Le début de la dernière partie est consacré à étendre par passage à la limite les théorèmes de descente au cas des faisceaux d'opérateurs différentiels complétés $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ sur un $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse $\mathcal{X}$, puis au faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ limite inductive de ceux-ci lorsque $m \rightarrow \infty$. En particulier, le foncteur F^* induit une équivalence de la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ -modules cohérents avec elle-même. Il apparaît ainsi que, lorsqu'on tensorise par $\mathbb{Q}$ et qu'on passe à la limite pour $m \rightarrow \infty$, on retrouve des propriétés d'invariance topologique analogues à celles des faisceaux étales. Pour ne pas allonger exagérément ce texte, nous n'y avons par contre pas inclut l'extension au cas des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -modules, ni à celui des $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ -modules, des théorèmes de compatibilité de F^* aux opérations cohomologiques montrés dans la troisième partie : en effet, la définition de ces opérations pose alors des problèmes assez délicats liés aux complétions, que nous traiterons dans [7].

Observons ici que, lorsqu'on tensorise par $\mathbb{Q}$, les théorèmes de descente obtenus sont liés à différents résultats connus. Ainsi, compte tenu des relations entre $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ -modules cohérents et isocristaux convergents explicitées dans [3] et [5], le dernier énoncé peut être vu comme une extension à des coefficients plus généraux, mais ici sur un schéma lisse et pour le morphisme de Frobenius, du théorème d'invariance topologique de la catégorie des isocristaux convergents prouvé par Ogus [36, 4.10]. De même, via le dictionnaire qu'on peut établir entre action de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ sur un fibré à connexion intégrable et rayon de convergence sur le disque générique des solutions des systèmes différentiels p -adiques (voir notamment la thèse de Garnier [23]), les théorèmes de descente établis ici apparaissent dans le cas formel comme une généralisation des résultats de Dwork et Christol sur l'existence de structures de Frobenius faibles sur les systèmes complètement solubles dans le disque générique (voir par exemple [22], [16], [17], [18]). Rappelons que c'est précisément ce type de structures qu'utilisent Christol et Mebkhout pour définir les exposants des systèmes différentiels p -adiques [19]. A cet égard, on notera que les formules obtenues par Garnier ([24], [25]), pour expliciter le théorème de descente par Frobenius pour les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ -modules et les $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ -modules à gauche, permettent de préciser les liens entre les méthodes algèbro-géométriques employées ici et celles de l'analyse p -adique.

Les théorèmes de descente par Frobenius sont un des outils essentiels dont on dispose dans la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$ -modules, et seront très utilisés dans les articles qui suivront ([7], [8]). Nous en donnons déjà ici plusieurs applications importantes. Mentionnons en particulier les suivantes :

(i) Supposons que l'automorphisme de Frobenius de k se relève en un automorphisme σ de $\mathcal{V}$. Soit alors $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ un relèvement du morphisme de Frobenius absolu de la fibre spéciale X de $\mathcal{X}$ (si $e < p^m(p-1)$, cette hypothèse d'existence de F globalement sur $\mathcal{X}$ est inutile, grâce à la méthode évoquée en (a) plus haut). Pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ -module $\mathcal{E}$, le morphisme de fonctorialité

$$H_{\mathrm{dR}}^*(\mathcal{X}, \mathcal{E}) \longrightarrow H_{\mathrm{dR}}^*(\mathcal{X}, F^*\mathcal{E})$$

est alors un isomorphisme (th. 4.3.5). On notera que, pour $m = 0$ et $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$, on retrouve ainsi, comme conséquence très simple des théorèmes de descente, le fait que l'action de Frobenius sur la cohomologie cristalline de X est un isomorphisme après tensorisation par $\mathbb{Q}$ [9, th. 1.3.1].

(ii) Le théorème de descente permet de ramener le calcul de la dimension homologique des anneaux $\widehat{\mathcal{D}}_X^{(m)}$ à celui de $\widehat{\mathcal{D}}_X^{(0)}$, qu'on peut traiter par les techniques de filtration habituelles. Nous montrons ainsi que chacun des $\widehat{\mathcal{D}}_X^{(m)}$ est de dimension $2d + 1$, où d est la dimension relative de X sur $\mathcal{V}$, et nous bornons respectivement celles de $\widehat{\mathcal{D}}_{X,\mathbb{Q}}^{(m)}$ et $\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^\dagger$ par $2d$ et $2d + 1$ (voir 4.4.4 à 4.4.7). Rappelons que l'on conjecture que ces dernières sont en fait égales à d . Un résultat de ce type avait été annoncé, prématurément semble-t-il, par Mebkhout et Narvaez [33] (voir [5, 2.2.7]).

Notant encore F^* l'image inverse par le morphisme de Frobenius absolu, nous introduisons dans la section 4.5 la notion de $F\text{-}\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^\dagger$ -module, qui consiste en la donnée d'un $\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^\dagger$ -module $\mathcal{E}$ et d'un isomorphisme $\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^\dagger$ -linéaire $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathcal{E}$. Cette notion peut être considérée comme généralisant les notions de F -isocrystal convergent et sur-convergent sur X , ainsi que nous l'expliquons dans la section 4.6. Le résultat principal établi ici, grâce au théorème de descente 2.3.6, est que tout $F\text{-}\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent se descend canoniquement avec son isomorphisme sur $\widehat{\mathcal{D}}_{X,\mathbb{Q}}^{(m)}$. Une conséquence remarquable de ce théorème de descente est que la catégorie des $F\text{-}\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents est une catégorie noethérienne, alors que l'analyse de l'action de F sur $\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^\dagger$ montre que $\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^\dagger$ n'est pas un faisceau d'anneaux noethériens (cf. 4.2.3). Signalons aussi que ce résultat de descente pour les $F\text{-}\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules est à la base de la construction de la variété caractéristique que nous donnerons dans [8], et de la caractérisation homologique de l'holonomie pour les $F\text{-}\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules obtenue par Virrion [42].

Enfin, nous revenons dans un appendice sur la construction de la filtration m -PD-adique, définie par un idéal I muni d'une structure partielle d'idéal à puissances divisées de niveau m . En effet, l'une des conditions imposées dans [5] s'avère trop contraignante, et ne fournit pas la propriété de nilpotence voulue pour $m \geq 1$ lorsque $p = 2$. La définition adoptée ici vérifie les bonnes propriétés de nilpotence, et n'induit aucune modification dans les cas où cette filtration était employée dans [5]; en particulier, elle ne modifie pas les voisinages à puissances divisées nilpotentes de niveau m dans le cas d'une immersion fermée entre schémas lisses, donc laisse inchangés les faisceaux de parties principales, et les faisceaux d'opérateurs différentiels qu'on en déduit.

Conventions générales

0.1. Dans tout le mémoire, on désigne par p un nombre premier fixé, et par $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ par rapport à l'idéal premier (p) .