448

ASTÉRISQUE

2024

LES SUITES SPECTRALES DE HODGE-TATE

Ahmed ABBES & Michel GROS

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 448, 2024

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
`commandes@smf.emath.fr`	`http://www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 77 € ($ 116)

Abonnement Europe : 794 €, hors Europe : 863 € ($ 1 294)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax : (33) 01 40 46 90 96
`asterisque@smf.emath.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN : 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN 978-2-85629-988-3
doi :10.24033/ast.1221

Directeur de la publication : Fabien Durand

448 ASTÉRISQUE

2024

LES SUITES SPECTRALES DE HODGE-TATE

Ahmed ABBES & Michel GROS

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ahmed Abbes
Laboratoire Alexander Grothendieck, CNRS, IHES, Université Paris-Saclay, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
abbes@ihes.fr

Michel Gros
Université de Rennes, CNRS, IRMAR – UMR 6625, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes cedex, France
michel.gros@univ-rennes1.fr

Texte soumis le 12 mars 2020, révisé le 13 octobre 2022, accepté le 7 décembre 2022.

***Mathematical Subject Classification* (2010). —** 11G25, 11F80, 14F05, 14F20, 14F30, 14F35, 14G20.
***Mots-clefs.* —** Théorie de Hodge p-adique, suite spectrale de Hodge-Tate, topos de Faltings, principal théorème de comparaison p-adique de Faltings, presque-algèbre de Faltings, schémas $K(\pi, 1)$.
***Keywords.* —** p-adic Hodge theory, Hodge-Tate spectral sequence, Faltings topos, Faltings main p-adic comparison theorem, Faltings almost algebra, $K(\pi, 1)$-schemes.

LES SUITES SPECTRALES DE HODGE-TATE

par Ahmed ABBES & Michel GROS

Résumé. — Ce livre présente deux résultats importants en théorie de Hodge p-adique suivant l'approche initiée par Faltings, à savoir (i) son principal théorème de comparaison p-adique, et (ii) la suite spectrale de Hodge-Tate. Nous établissons pour chacun de ces résultats deux versions, une absolue et une relative. Si les énoncés absolus pouvaient raisonnablement être considérés comme bien compris, notamment après leur extension aux variétés rigides par Scholze, l'approche initiale de Faltings pour les variantes relatives restait beaucoup moins étudiée. Bien que nous suivions la même stratégie que celle utilisée par Faltings pour établir son principal théorème de comparaison p-adique, une partie de nos preuves est basée sur de nouveaux résultats. La suite spectrale de Hodge-Tate relative est nouvelle dans cette approche.

Abstract. **(The Hodge-Tate spectral sequences)** — This book presents two important results in p-adic Hodge theory following the approach initiated by Faltings, namely (i) his main p-adic comparison theorem, and (ii) the Hodge-Tate spectral sequence. We establish for each of these results two versions, an absolute one and a relative one. While the absolute statements can reasonably be considered as well understood, particularly after their extension to rigid varieties by Scholze, Faltings' initial approach for the relative variants has remained much less studied. Although we follow the same strategy as that used by Faltings to establish his main p-adic comparison theorem, part of our proofs is based on new results. The relative Hodge-Tate spectral sequence is new in this approach.

À la mémoire de Jean-Marc Fontaine et de Michel Raynaud

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

Ce livre présente deux résultats importants en théorie de Hodge p-adique suivant l'approche initiée par Faltings dans [**15, 16**], à savoir

(i) son principal théorème de comparaison p-adique ;
(ii) la suite spectrale de Hodge-Tate.

Nous établissons pour chacun de ces résultats deux versions, une absolue et une relative. Si les énoncés absolus peuvent raisonnablement être considérés comme bien compris, en particulier après leur extension aux variétés rigides par Scholze [**57**], l'approche initiale de Faltings pour les variantes relatives est demeurée bien moins étudiée. La suite spectrale de Hodge-Tate relative est, quant à elle, nouvelle dans cette approche.

Bien que nous suivions la même stratégie que celle utilisée par Faltings pour établir son principal théorème de comparaison p-adique [**16**], une partie de nos démonstrations repose sur de nouveaux résultats. La preuve du cas absolu, que nous présentons avec tous les détails qu'elle mérite, est considérablement simplifiée par rapport à celle de Faltings par l'utilisation d'un résultat récent d'Achinger sur le caractère local $K(\pi, 1)$ des schémas logarithmiques considérés [**4**]. Faltings a formulé la version relative de son principal théorème de comparaison p-adique dans [**16**] et en a très sommairement esquissé une preuve dans l'appendice. Certains de ses arguments doivent d'ailleurs être modifiés et la preuve donnée dans ce livre requiert bien plus de travail. Elle est basée sur une étude fine de la structure locale de certains φ-modules presque-étales qui est, par ailleurs, intéressante en elle-même.

La suite spectrale de Hodge-Tate dans le cas absolu, qu'on devine en filigrane dans le travail de Faltings [**16**], n'a été explicitement dégagée qu'ultérieurement par Scholze qui l'a généralisée aux variétés rigides [**58**]. Nous la déduisons du principal théorème de comparaison p-adique de Faltings et de la théorie de Kummer sur la fibre spéciale du topos de Faltings annelé. La suite spectrale de Hodge-Tate relative prend racine dans le topos de Faltings. Sa construction nécessite l'introduction d'une variante relative de ce topos dont la définition et l'étude sont les principales nouveautés de notre travail. Nous donnons également deux variantes « locales » qui s'en déduisent dont l'énoncé ne nécessite pas l'utilisation du topos de Faltings. Utilisant une approche différente, Caraiani et Scholze ([**10**] 2.2.4) ont construit une filtration de Hodge-Tate relative pour les morphismes propres et lisses entre espaces adiques. Antérieurement, Hyodo avait aussi considéré un cas particulier de telle filtration pour des schémas abéliens [**37**].

Outre la volonté de renforcer les fondations de résultats devenus centraux en géométrie arithmétique, ce travail a été motivé par l'étude de la fonctorialité par image directe propre et (log-)lisse, à la Katz-Oda, de la correspondance de Simpson p-adique développée dans [**3**]. Cette question est traitée dans [**2**]. Le présent livre est, grâce aux rappels qu'il contient, essentiellement indépendant de [**2, 3**].

Au-delà de la table des matières, donnons maintenant quelques indications sur l'organisation de ce volume. Le chapitre 1 présente un survol des principaux résultats obtenus dans ce livre et la stratégie de leurs démonstrations. Par simplicité, nous avons fait le choix de nous limiter dans ce chapitre introductif aux schémas lisses, plutôt qu'à singularités toriques considérés dans le reste du livre. Nous avons aussi mis l'accent sur la situation relative qui est la plus inédite. Le chapitre 2 rassemble divers résultats préliminaires de natures assez différentes utilisés ici ou là dans le texte ; le lecteur peut ne le consulter qu'au fur et à mesure de ses besoins. Le chapitre 3, après quelques préliminaires sur les produits orientés de topos, fournit les rappels nécessaires sur le topos de Faltings ([**3**] VI) et donne la construction de sa variante relative. Le chapitre 4 traite ensuite de la cohomologie du topos de Faltings et se conclut par la preuve du principal théorème de comparaison p-adique de Faltings. Suivant un cheminement similaire, le chapitre 5 aborde alors l'extension de ce type de résultats au cadre relatif. Les démonstrations deviennent plus techniques et un ingrédient nouveau est à mettre en œuvre concernant la structure de certains φ-modules presque-étales (5.5.22). Enfin, le chapitre 6 exploite le formalisme des topos de Faltings et les théorèmes de comparaison p-adiques obtenus précédemment pour construire les suites spectrales de Hodge-Tate et établir leurs propriétés de fonctorialité et d'équivariance aux actions galoisiennes naturelles.

Remerciements. — Nous tenons en premier lieu à exprimer toute notre reconnaissance à G. Faltings pour l'inspiration constante suscitée par ses travaux. Ce livre s'inscrit dans le prolongement direct de ses idées en théorie de Hodge p-adique. À diverses étapes de l'élaboration de ce texte, l'inestimable expertise d'O. Gabber et de T. Tsuji a été cruciale pour nous éviter de longs et inutiles détours. O. Gabber nous a de plus aidé à corriger une erreur importante dans une première version de ce livre et T. Tsuji nous a fait bénéficier de très précieux et nombreux commentaires pour en améliorer la rédaction : qu'ils soient tous deux ici très chaleureusement remerciés pour leur indéfectible générosité. Nous remercions T. He pour sa lecture attentive du manuscrit ayant conduit à de nombreuses améliorations. Nous remercions aussi les rapporteurs pour leurs nombreuses suggestions et tout spécialement celui des chapitres 5 et 6 pour sa relecture très méticuleuse et ses nombreux et utiles commentaires. Le premier auteur (A.A) remercie l'Université de Tokyo et l'Université Tsinghua pour leur hospitalité lors de plusieurs visites où des parties de ce travail ont été développées et présentées. Il exprime sa gratitude à T. Saito et L. Fu pour leurs invitations.

CHAPITRE 1

LA SUITE SPECTRALE DE HODGE-TATE RELATIVE UN SURVOL

1.1. Introduction

1.1.1. — Soient K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0, à corps résiduel *algébriquement clos* de caractéristique $p > 0$, $\mathscr{O}_K$ l'anneau de valuation de K, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ la clôture intégrale de $\mathscr{O}_K$ dans $\overline{K}$. On note G_K le groupe de Galois de $\overline{K}$ sur K, $\mathscr{O}_C$ le complété p-adique de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$, $\mathfrak{m}_C$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_C$ et C son corps des fractions. On pose $S = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_K)$ et $\overline{S} = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\overline{K}})$ et on note s (resp. η, resp. $\overline{\eta}$) le point fermé de S (resp. le point générique de S, resp. le point générique de $\overline{S}$). Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $S_n = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_K/p^n\mathscr{O}_K)$. Pour tout S-schéma X, on pose

$$\overline{X} = X \times_S \overline{S} \quad \text{et} \quad X_n = X \times_S S_n. \tag{1.1.1.1}$$

L'énoncé suivant, appelé la *décomposition de Hodge-Tate*, a été conjecturé par Tate ([**60**] Remark page 180) et démontré par différentes méthodes par Faltings [**15, 16**], Niziol [**48, 50**] et Tsuji [**61, 62**].

Théorème 1.1.2. — *Pour tout η-schéma propre et lisse X et tout entier $n \geq 0$, il existe une décomposition fonctorielle G_K-équivariante canonique*

$$\mathrm{H}^n_{\text{ét}}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} C \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{H}^i(X, \Omega^{n-i}_{X/\eta}) \otimes_K C(i-n). \tag{1.1.2.1}$$

La décomposition de Hodge-Tate est équivalente à l'existence d'une suite spectrale canonique, fonctorielle et G_K-équivariante, la *suite spectrale de Hodge-Tate*,

$$\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{H}^i(X, \Omega^j_{X/\eta}) \otimes_K C(-j) \Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} C. \tag{1.1.2.2}$$

Les deux énoncés sont équivalents d'après un théorème de Tate ([**60**] theo. 2). En effet, le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^0(G_K, C(1))$ s'annule, ce qui implique que la suite spectrale dégénère en E_2. Le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^1(G_K, C(1))$ s'annule également, ce qui implique que la filtration aboutissement est scindée.

Cette suite spectrale de Hodge-Tate, qu'on devine en filigrane dans le travail de Faltings [**16**], n'a été explicitement dégagée qu'ultérieurement par Scholze qui l'a généralisée aux variétés rigides [**58**].

1.1.3. — Nous donnons dans ce chapitre un survol du travail présenté dans ce livre conduisant à une généralisation de la suite spectrale de Hodge-Tate aux morphismes. Celle-ci prend racine dans le topos de Faltings. Sa construction requiert l'introduction d'une variante relative de ce topos qui est la principale nouveauté de notre travail. Utilisant une approche différente, Caraiani et Scholze ([**10**] 2.2.4) ont construit une filtration de Hodge-Tate relative pour les morphismes propres et lisses entre espaces adiques. Antérieurement, Hyodo avait aussi considéré un cas particulier pour des schémas abéliens [**37**].

Au-delà des suites spectrales de Hodge-Tate, nous donnons dans ce livre des preuves complètes des principaux théorèmes de comparaison p-adiques de Faltings. Ces derniers sont essentiels pour la construction de ces suites spectrales. Bien que la version absolue de ces théorèmes soit plutôt bien comprise, la version relative, seulement sommairement esquissée par Faltings dans l'appendice de [**16**], est restée peu étudiée. En étendant la stratégie de Faltings, Scholze a prouvé des résultats similaires ([**57**] 1.3 and 5.12) dans le contexte des espaces adiques et des topos pro-étales. On renvoie aux articles de He [**34, 35**] pour une analyse des liens entre les différentes approches.

Dans un travail récent [**2**] consacré à la fonctorialité de correspondance de Simpson p-adique [**3**] par image directe propre et (log-)lisse, nous étendons la construction de la suite spectrale de Hodge-Tate relative à des coefficients plus généraux.

1.1.4. — Avant d'introduire la suite spectrale de Hodge-Tate relative qui requiert le formalisme du topos de Faltings, nous présentons tout d'abord deux versions locales qui en sont des conséquences plus faciles à énoncer.

Nous traitons dans ce livre le cas des schémas à singularités toriques à l'aide de la géométrie logarithmique mais, par simplicité, nous considérons dans ce survol seulement le cas lisse.

1.2. La suite spectrale de Hodge-Tate relative : sections globales au-dessus d'un petit schéma affine

1.2.1. — Soit $X = \mathrm{Spec}(R)$ un S-schéma affine et lisse vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) X est *petit* dans le sens de Faltings, c'est-à-dire qu'il admet un S-morphisme étale dans un S-tore, $X \to \mathbb{G}^d_{m,S} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}])$, pour un entier $d \geq 0$. Cette condition sera remplacée dans le cas logarithmique général par l'existence de cartes adéquates (4.2.1) ;

(ii) X_s est non vide.

Soit $\overline{y}$ un point géométrique de $X_{\overline{\eta}}$. On désigne par $X_{\eta}^{\star}$ (resp. $X_{\overline{\eta}}^{*}$) la composante connexe de X_{η} (resp. $X_{\overline{\eta}}$) contenant l'image de $\overline{y}$ et par $(V_i)_{i\in I}$ le revêtement universel de $X_{\overline{\eta}}^{*}$ en $\overline{y}$ ([**3**] VI.9.7.3). On pose $\Gamma = \pi_1(X_{\eta}^{\star}, \overline{y})$ et $\Delta = \pi_1(X_{\overline{\eta}}^{*}, \overline{y})$. Pour tout $i \in I$, on note $X_i = \mathrm{Spec}(R_i)$ la normalisation de $\overline{X} = X \times_S \overline{S}$ dans V_i.

(1.2.1.1)
$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r] \arrow[d] & X_i \arrow[d] \\ X_{\overline{\eta}} \arrow[r] & \overline{X}. \end{tikzcd}$$

Les $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-algèbres $(R_i)_{i\in I}$ forment naturellement un système inductif. On désigne par $\overline{R}$ sa limite inductive,

(1.2.1.2)
$$\overline{R} = \varinjlim_{i\in I} R_i,$$

et par $\widehat{\overline{R}}$ son complété p-adique, qu'on munit des actions naturelles de Γ. La Γ-représentation $\widehat{\overline{R}}$ est un analogue de la G_K-représentation $\mathscr{O}_C$.

***Théorème 1.2.2* (cf. 6.9.6). —** *Sous les hypothèses de 1.2.1, pour tout morphisme projectif et lisse $g\colon X' \to X$, et tout entier $q \geq 0$, il existe $(\mathrm{fil}_r^q)_{0\leq r\leq q+1}$, une filtration décroissante exhaustive canonique de $\mathrm{H}^q_{\text{ét}}(X'_{\overline{y}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{\overline{R}}[\frac{1}{p}]$ par des $\widehat{\overline{R}}[\frac{1}{p}]$-représentations de Γ, telle que fil_{q+1}^q soit nul et que pour tout entier $0 \leq r \leq q$, on ait une suite exacte Γ-équivariante canonique*

(1.2.2.1)
$$0 \to \mathrm{fil}_{r+1}^q \to \mathrm{fil}_r^q \to \mathrm{H}^r(X', \Omega^{q-r}_{X'/X}) \otimes_R \widehat{\overline{R}}[\frac{1}{p}](r-q) \to 0.$$

Il revient au même de dire qu'il existe une suite spectrale canonique Γ-équivariante

(1.2.2.2)
$$\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{H}^i(X', \Omega^j_{X'/X}) \otimes_R \widehat{\overline{R}}[\frac{1}{p}](-j) \Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}_{\text{ét}}(X'_{\overline{y}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{\overline{R}}.$$

En effet, il résulte du théorème de presque-pureté de Faltings que le groupe $\mathrm{H}^0(\Gamma, \widehat{\overline{R}}[\frac{1}{p}](j))$ est nul pour tout $j \neq 0$. La suite spectrale (1.2.2.2) dégénère donc en E_2. Cependant, le groupe $\mathrm{H}^1(\Gamma, \widehat{\overline{R}}[\frac{1}{p}](1))$ n'étant pas nul en général, la filtration aboutissement ne se scinde pas en général.

1.2.3. — Nous avons conjecturé l'existence de la suite spectrale (1.2.2.2) dans une première version de ce travail. Scholze nous a immédiatement informé qu'il savait construire une telle suite spectrale en utilisant la filtration de Hodge-Tate relative associée à un morphisme propre et lisse entre espaces adiques qu'il a développée avec Caraiani ([**10**] 2.2.4). Nous n'abordons pas dans ce travail la question de la comparaison de leur filtration avec la nôtre (1.2.2). Bhatt nous a aussi signalé qu'il a une stratégie pour déduire la suite spectrale (1.2.2.2) du formalisme général de cohomologie prismatique.

He sait construire la filtration de Hodge-Tate relative (1.2.2) dans un cadre encore plus général que celui de 6.9.6. Il l'a déduite de la variante globale de notre suite spectrale de Hodge-Tate relative (1.4.5) et de son résultat de descente cohomologique pour le topos de Faltings établi dans [**34**]. Notre preuve de 1.2.2, similaire dans l'esprit à la sienne, a été indépendamment suggérée par le rapporteur. Nous démontrons pour ce faire un énoncé de descente cohomologique 4.6.30, qui s'avère être un cas particulier de celui de He.

1.3. La suite spectrale de Hodge-Tate relative : localisation

1.3.1. — Soient X un S-schéma lisse, $\overline{x}$ un point géométrique de X au-dessus de s, $\underline{X}$ le localisé strict de X en $\overline{x}$. Soit $\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}$ un morphisme de spécialisation, c'est-à-dire un X-morphisme $u\colon \overline{y} \to \underline{X}$. Ce dernier induit un $X_{\overline{\eta}}$-morphisme $\overline{y} \to \underline{X}_{\overline{\eta}}$. Posons $\underline{\Gamma} = \pi_1(\underline{X}_{\eta}, \overline{y})$ et soit $\mathscr{V}_{\overline{x}}$ la catégorie des X-schémas affine étales $\overline{x}$-pointés. Pour tout objet U de $\mathscr{V}_{\overline{x}}$, nous notons $\overline{R}_U$ la $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-algèbre définie comme dans (1.2.1.2) pour le S-schéma U et le point géométrique $\overline{y} \to U_{\overline{\eta}}$ induit par le morphisme canonique $\underline{X} \to U$. Les $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-algèbres $(\overline{R}_U)_{U \in \mathscr{V}_{\overline{x}}}$ forment naturellement un système inductif. Nous notons $\underline{\overline{R}}$ sa limite inductive,

$$\underline{\overline{R}} = \varinjlim_{U \in \mathscr{V}_{\overline{x}}} \overline{R}_U, \tag{1.3.1.1}$$

et $\widehat{\underline{\overline{R}}}$ son complété p-adique, que nous munissons des actions naturelles de $\underline{\Gamma}$.

***Théorème 1.3.2* (cf. 6.8.7).** — *Sous les hypothèses de 1.3.1, pour tout morphisme projectif et lisse $g\colon X' \to X$, posant $\underline{X}' = X' \times_X \underline{X}$, il existe une suite spectrale $\underline{\Gamma}$-équivariante canonique*

$$\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{H}^i(\underline{X}', \Omega^j_{\underline{X}'/\underline{X}}) \otimes_{\mathscr{O}_X(\underline{X})} \widehat{\underline{\overline{R}}}[\frac{1}{p}](-j) \Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}_{\text{ét}}(X'_{\overline{y}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{\underline{\overline{R}}}[\frac{1}{p}]. \tag{1.3.2.1}$$

Il résulte encore du théorème de presque-pureté de Faltings que le groupe $\mathrm{H}^0(\underline{\Gamma}, \widehat{\underline{\overline{R}}}[\frac{1}{p}](1))$ est nul. La suite spectrale (1.3.2.1) dégénère donc en E_2. Cependant, le groupe $\mathrm{H}^1(\underline{\Gamma}, \widehat{\underline{\overline{R}}}[\frac{1}{p}](1))$ n'étant pas nul en général, la filtration aboutissement ne se scinde pas en général.

Nous donnons deux constructions de la suite spectrale (1.3.2.1). L'une (6.8.26) est une application de la variante globale (1.4.5). L'autre (6.8.7) est analogue à la construction globale.

1.3.3. — Hyodo a établi dans [**37**] le cas particulier de 1.3.2 où X' est un schéma abélien sur X et $\overline{x}$ est un point géométrique générique de la fibre spéciale de X. Il a aussi donné des exemples où la filtration aboutissement ne se scinde pas.

1.3.4. — La suite spectrale (1.3.2.1) peut être globalisée sur un topos naturel, dont les points sont paramétrés par les morphismes de spécialisation $\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}$ d'un point géométrique $\overline{y}$ de $X_{\overline{\eta}}$ vers un point géométrique $\overline{x}$ de X, à savoir sur le *topos de Faltings*. Ce dernier est au cœur de la suite spectrale de Hodge-Tate, y compris dans le cas absolu. Il a été largement étudié dans ([**3**] VI). Nous allons brièvement le passer en revue dans la section suivante.

1.4. La suite spectrale de Hodge-Tate relative

1.4.1. — Soit X un S-schéma lisse (1.1.4). On note E la catégorie des morphismes $V \to U$ au-dessus du morphisme canonique $X_{\overline{\eta}} \to X$, c'est-à-dire les diagrammes commutatifs

(1.4.1.1)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ X_{\overline{\eta}} \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

tels que U soit étale au-dessus de X et que le morphisme canonique $V \to U_{\overline{\eta}}$ soit *fini étale*. Il est utile de considérer la catégorie E comme fibrée par le foncteur

(1.4.1.2)
$$\pi\colon E \to \mathbf{\acute{E}t}_{/X}, \quad (V \to U) \mapsto U,$$

au-dessus du site étale de X. La fibre de π au-dessus d'un objet U de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ est canoniquement équivalente à la catégorie $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/U_{\overline{\eta}}}$ des morphismes finis étales au-dessus de $U_{\overline{\eta}}$. On la munit de la topologie étale et on note $U_{\overline{\eta},\mathrm{f\acute{e}t}}$ le topos associé. Si $U_{\overline{\eta}}$ est connexe et si $\overline{y}$ est un point géométrique de $U_{\overline{\eta}}$, alors le topos $U_{\overline{\eta},\mathrm{f\acute{e}t}}$ est équivalent au topos classifiant du groupe profini $\pi_1(U_{\overline{\eta}}, \overline{y})$, i.e., à la catégorie des ensembles discrets munis d'une action à gauche continue de $\pi_1(U_{\overline{\eta}}, \overline{y})$.

Nous munissons E de la topologie *co-évanescente* ([**3**] VI.1.10), c'est-à-dire de la topologie engendrée par les recouvrements $\{(V_i \to U_i) \to (V \to U)\}_{i\in I}$ des types suivants :

(v) $U_i = U$ pour tout $i \in I$ et $(V_i \to V)_{i\in I}$ est un recouvrement ;
(c) $(U_i \to U)_{i\in I}$ est un recouvrement et $V_i = V \times_U U_i$ pour tout $i \in I$.

Le site ainsi obtenu est appelé *site de Faltings* de X. On désigne par $\widetilde{E}$ et l'on appelle *topos de Faltings* de X le topos des faisceaux d'ensembles sur E. C'est un analogue du topos co-évanescent $X_{\mathrm{\acute{e}t}} \overleftarrow{\times}_{X_{\mathrm{\acute{e}t}}} X_{\overline{\eta},\mathrm{\acute{e}t}}$ ([**3**] VI.4).

Se donner un faisceau F sur E revient à se donner :

(i) pour tout objet U de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$, un faisceau F_U de $U_{\overline{\eta},\mathrm{f\acute{e}t}}$, à savoir la restriction de F à la fibre de π au-dessus de U ;
(ii) pour tout morphisme $f\colon U' \to U$ de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$, un morphisme $\gamma_f\colon F_U \to f_{\overline{\eta}*}(F_{U'})$.

Ces données sont astreintes à une condition de cocycle pour la composition des morphismes et à une condition de recollement pour les recouvrements de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ ([**3**] VI.5.10). Un tel faisceau sera noté $\{U \mapsto F_U\}$.

Il existe trois morphismes canoniques de topos

$$
\begin{tikzcd}
 & X_{\overline{\eta},\text{ét}} \arrow[d, "\psi"'] & \\
X_{\text{ét}} & \widetilde{E} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[r, "\beta"] & X_{\overline{\eta},\text{fét}}
\end{tikzcd}
\tag{1.4.1.3}
$$

tels que

$$\sigma^*(U) = (U_{\overline{\eta}} \to U)^a, \quad \forall\, U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X}), \tag{1.4.1.4}$$

$$\beta^*(V) = (V \to X)^a, \quad \forall\, V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/X_{\overline{\eta}}}), \tag{1.4.1.5}$$

$$\psi^*(V \to U) = V, \quad \forall\, (V \to U) \in \mathrm{Ob}(E), \tag{1.4.1.6}$$

où l'exposant ^{a} désigne le faisceau associé. Les morphismes σ et β sont les analogues de la première et de la seconde projection du topos co-évanescent $X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} X_{\overline{\eta},\text{ét}}$. Le morphisme ψ est un analogue du morphisme des cycles co-proches ([**3**] VI.4.13).

Chaque morphisme de spécialisation $\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}$ d'un point géométrique $\overline{y}$ de $X_{\overline{\eta}}$ vers un point géométrique $\overline{x}$ de X détermine un point de $\widetilde{E}$ noté $\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ ([**3**] VI.10.18). La famille de ces points est conservative ([**3**] VI.10.21).

***Proposition 1.4.2* (cf. 4.4.2). —** *Pour tout faisceau abélien de torsion, localement constant et constructible F de $X_{\overline{\eta},\text{ét}}$, on a $\mathrm{R}^i\psi_*(F) = 0$ pour tout $i \geq 1$.*

Cet énoncé est une conséquence du fait que pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X au-dessus de s, notant $\underline{X}$ le localisé strict de X en $\overline{x}$, $\underline{X}_{\overline{\eta}}$ est un schéma $K(\pi, 1)$ ([**3**] VI.9.21), i.e., si $\overline{y}$ est un point géométrique de $\underline{X}_{\overline{\eta}}$, pour tout faisceau abélien de torsion, localement constant et constructible F sur $\underline{X}_{\overline{\eta}}$ et tout $i \geq 0$, on a un isomorphisme

$$\mathrm{H}^i(\underline{X}_{\overline{\eta}}, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(\pi_1(\underline{X}_{\overline{\eta}}, \overline{y}), F_{\overline{y}}). \tag{1.4.2.1}$$

Cette propriété a été prouvée par Faltings ([**15**] Lemma 2.3 page 281) comme généralisation de résultats d'Artin ([**5**] XI). Elle a été ensuite étendue au cas log-lisse par Achinger ([**4**] 9.5).

1.4.3. — Pour tout objet $(V \to U)$ de E, on note $\overline{U}^V$ la clôture intégrale de $\overline{U}$ dans V et l'on pose

$$\overline{\mathscr{B}}(V \to U) = \Gamma(\overline{U}^V, \mathscr{O}_{\overline{U}^V}). \tag{1.4.3.1}$$

Le préfaisceau sur E ainsi défini est en fait un faisceau ([**3**] III.8.16). On écrira $\overline{\mathscr{B}} = \{U \mapsto \overline{\mathscr{B}}_U\}$ (cf. 1.4.1). Pour tout X-schéma étale U qui est affine, la fibre du faisceau $\overline{\mathscr{B}}_U$ de $U_{\overline{\eta},\text{fét}}$ en un point géométrique $\overline{y}$ de $U_{\overline{\eta}}$, est la représentation $\overline{R}_U$ de $\pi_1(U_{\overline{\eta}}, \overline{y})$ définie dans (1.2.1.2) pour U.

Pour tout morphisme de spécialisation $\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}$, on a

$$\overline{\mathscr{B}}_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})} = \varinjlim_{U \in \mathscr{V}_{\overline{x}}} \overline{R}_U, \tag{1.4.3.2}$$

où $\mathscr{V}_{\overline{x}}$ est la catégorie des X-schémas étales $\overline{x}$-pointés U qui sont affines.

1.4.4. — Pour tout topos T, les systèmes projectifs d'objets de T indexés par l'ensemble ordonné des entiers naturels $\mathbb{N}$ forment un topos que nous notons $T^{\mathbb{N}^\circ}$ (**[3]** III.7).

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $\overline{\mathscr{B}}_n = \overline{\mathscr{B}}/p^n\overline{\mathscr{B}}$. Afin de prendre en compte la topologie p-adique, on considère la $\mathscr{O}_C$-algèbre $\breve{\overline{\mathscr{B}}} = (\overline{\mathscr{B}}_n)_{n\geq 1}$ du topos $\widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ}$. On travaillera dans la catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ des $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-modules à isogénie près (**[3]** III.6.1), qui est un analogue global de la catégorie des $\widehat{\overline{R}}[\frac{1}{p}]$-représentations de Δ considérée dans 1.2.1.

Théorème 1.4.5 **(cf. 6.7.5).** — *Soit $g\colon X' \to X$ un morphisme projectif et lisse. Notons*

$$X'^{\mathbb{N}^\circ}_{\overline{\eta},\text{ét}} \xrightarrow{\breve{g}_{\overline{\eta}}} X^{\mathbb{N}^\circ}_{\overline{\eta},\text{ét}} \xrightarrow{\breve{\psi}} \widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ} \tag{1.4.5.1}$$

les morphismes induits par $g_{\overline{\eta}}$ et ψ (1.4.1.3), *et $\breve{\mathbb{Z}}_p$ la $\mathbb{Z}_p$-algèbre $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{n\geq 1}$ de $X'^{\mathbb{N}^\circ}_{\overline{\eta},\text{ét}}$. Alors, il existe une suite spectrale canonique de $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-modules*

$$\mathrm{E}_2^{i,j} = \sigma^*(\mathrm{R}^i g_*(\Omega^j_{X'/X})) \otimes_{\sigma^*(\mathscr{O}_X)} \breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}(-j) \Rightarrow \breve{\psi}_*(\mathrm{R}^{i+j}\breve{g}_{\overline{\eta}*}(\breve{\mathbb{Z}}_p)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}. \tag{1.4.5.2}$$

Ce théorème, ainsi que les énoncés 1.2.2 et 1.3.2, valent en fait sous l'hypothèse plus générale que g *soit propre.* En effet, l'hypothèse de projectivité sur g est utilisée dans 1.5.6 ci-dessous qui s'étend également aux morphismes propres (voir 1.5.7).

La suite spectrale (1.4.5.2) est appelée la *suite spectrale de Hodge-Tate relative.* On démontre aisément qu'elle est G_K-équivariante pour les structures G_K-équivariantes naturelles sur les topos et les objets intervenant dans sa formulation. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 1.4.6 **(cf. 6.7.13).** — *Sous les hypothèses de 1.4.5, la suite spectrale de Hodge-Tate relative* (1.4.5.2) *dégénère en* E_2.

Remarque 1.4.7. — Avec une approche différente, Caraiani et Scholze ont construit une filtration de Hodge-Tate relative pour les morphismes propres et lisses d'espaces adiques (**[10]** 2.2.4). Comme pour la variante locale (1.2.3), nous n'abordons pas dans ce travail la question de la comparaison de leur filtration avec la filtration aboutissement de notre suite spectrale de Hodge-Tate relative.

1.5. Les principaux théorèmes de comparaison p-adiques de Faltings

1.5.1. — Nous conservons dans cette section les hypothèses et notations de § 1.4. On note $\mathscr{O}_{\overline{K}^\flat}$ la limite du système projectif $(\mathscr{O}_{\overline{K}}/p\mathscr{O}_{\overline{K}})_{\mathbb{N}}$ dont les morphismes de transition sont les itérés de l'endomorphisme de Frobenius absolu de $\mathscr{O}_{\overline{K}}/p\mathscr{O}_{\overline{K}}$;

$$\mathscr{O}_{\overline{K}^\flat} = \varprojlim_{\mathbb{N}} \mathscr{O}_{\overline{K}}/p\mathscr{O}_{\overline{K}}. \tag{1.5.1.1}$$

C'est un anneau de valuation non-discrète complet, parfait, de hauteur 1 et de caractéristique p. On fixe une suite $(p_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ telle que $p_0 = p$ et $p_{n+1}^p = p_n$ pour tout $n \geq 0$. On note ϖ l'élément associé de $\mathscr{O}_{\overline{K}^\flat}$ et on pose $\xi = [\varpi] - p$ dans l'anneau $\mathrm{W}(\mathscr{O}_{\overline{K}^\flat})$ des vecteurs de Witt p-typiques de $\mathscr{O}_{\overline{K}^\flat}$. On a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{O}_C(1) \xrightarrow{\sim} p^{\frac{1}{p-1}}\xi\mathscr{O}_C. \tag{1.5.1.2}$$

***Théorème 1.5.2* (cf. 4.8.13, [16]). —** *Supposons que X soit propre sur S. Soient i, n deux entiers ≥ 0, F un faisceau localement constant constructible de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$-modules de $X_{\overline{\eta},\text{ét}}$. Alors, le noyau et le conoyau du morphisme canonique*

$$\mathrm{H}^i(X_{\overline{\eta},\text{ét}}, F) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_C \to \mathrm{H}^i(\widetilde{E}, \psi_*(F) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathscr{B}}) \tag{1.5.2.1}$$

sont annulés par $\mathfrak{m}_C$.

On dira que le morphisme (1.5.2.1) est un *presque-isomorphisme.*

C'est le *principal théorème de comparaison p-adique de Faltings* à partir duquel se déduisent tous les théorèmes de comparaison entre la cohomologie étale p-adique et les autres cohomologies p-adiques. C'est aussi le principal ingrédient dans la construction de la suite spectrale de Hodge-Tate absolue (1.1.2.2).

Nous revisitons dans ce livre la preuve de Faltings de ce résultat important en donnant plus de détails. Elle est basée sur la suite exacte d'Artin-Schreier pour la « perfection » de l'anneau $\overline{\mathscr{B}}_1 = \overline{\mathscr{B}}/p\overline{\mathscr{B}}$. Un des ingrédients principaux est un énoncé de structure pour les φ-modules presque-étales sur $\mathscr{O}_{\overline{K}^\flat}$ vérifiant certaines conditions, incluant une condition de presque-finitude au sens de Faltings. Dans notre application à la cohomologie du topos de Faltings annelé par la « perfection » de $\overline{\mathscr{B}}_1$, la preuve de cette dernière condition résulte de la combinaison de trois ingrédients :

(i) des calculs locaux de cohomologie galoisienne utilisant le théorème de presque-pureté de Faltings ([**16**], [**3**] II.8.17) ;
(ii) une étude fine des conditions de presque-finitude pour les faisceaux quasi-cohérents de modules sur les schémas ;
(iii) le résultat de Kiehl sur la finitude de la cohomologie pour un morphisme propre ([**46**] 2.9′a) (cf. [**1**] 1.4.7).

1.5.3. — Expliquons maintenant la construction de Faltings de la suite spectrale de Hodge-Tate absolue (1.1.2.2). Supposons que X soit propre sur S. Par 1.4.2, pour tous $i, n \geq 0$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^i(X_{\overline{\eta},\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(\widetilde{E}, \psi_*(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})). \tag{1.5.3.1}$$

Il n'est pas difficile de voir que le morphisme canonique $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \psi_*(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Utilisant alors le principal théorème de comparaison p-adique de Faltings 1.5.2, on obtient un morphisme canonique

$$\mathrm{H}^i(X_{\overline{\eta},\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_C \to \mathrm{H}^i(\widetilde{E}, \overline{\mathscr{B}}_n) \tag{1.5.3.2}$$

qui est un presque-isomorphisme. Pour calculer $\mathrm{H}^i(\widetilde{E}, \overline{\mathscr{B}}_n)$, on utilise la suite spectrale de Cartan-Leray pour le morphisme $\sigma\colon \widetilde{E} \to X_{\text{ét}}$ (1.4.1.3),

$$\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{H}^i(X_{\text{ét}}, \mathrm{R}^j\sigma_*(\overline{\mathscr{B}}_n)) \Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}(\widetilde{E}, \overline{\mathscr{B}}_n). \tag{1.5.3.3}$$

On en déduit la suite spectrale de Hodge-Tate absolue (1.1.2.2) en utilisant l'analogue global suivant du calcul de Faltings de la cohomologie galoisienne.

***Théorème 1.5.4* (cf. 6.3.8). —** *Il existe un homomorphisme canonique de $\mathscr{O}_{\overline{X}_n}$-algèbres graduées de $X_{s,\text{ét}}$*

$$\wedge(\xi^{-1}\Omega^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}) \to \bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{R}^i\sigma_*(\overline{\mathscr{B}}_n), \tag{1.5.4.1}$$

où ξ est l'élément de $\mathrm{W}(\mathscr{O}_{\overline{K}^\flat})$ défini en 1.5.1, dont le noyau (resp. conoyau) est annulé par $p^{\frac{2d}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ (resp. $p^{\frac{2d+1}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$), où $d = \dim(X/S)$.

Nous prouvons ce résultat en utilisant la théorie de Kummer sur la fibre spéciale du topos de Faltings annelé $(\widetilde{E}, \overline{\mathscr{B}})$.

1.5.5. — Soit $g\colon X' \to X$ un morphisme lisse (1.1.4). On associe à X' des objets similaires à ceux associés à X in § 1.4 et on les affecte d'un exposant $'$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X'_{\overline{\eta},\text{ét}} \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "g_{\overline{\eta}}"'] & \widetilde{E}' \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, "\Theta"] & X'_{\text{ét}} \arrow[d, "g"] \\ X_{\overline{\eta},\text{ét}} \arrow[r, "\psi"] & \widetilde{E} \arrow[r, "\sigma"] & X_{\text{ét}} \end{tikzcd} \tag{1.5.5.1}$$

dans lequel Θ est défini, pour tout objet $(V \to U)$ de E, par

$$\Theta^*(V \to U) = (V \times_X X' \to U \times_X X')^a, \tag{1.5.5.2}$$

où l'exposant ^{a} désigne la faisceau associé. On a un homomorphisme canonique d'anneaux

$$\overline{\mathscr{B}} \to \Theta_*(\overline{\mathscr{B}}'). \tag{1.5.5.3}$$

***Théorème 1.5.6* (cf. 5.7.4, [16] § 6). —** *Supposons que $g\colon X' \to X$ soit projectif. Soient i, n deux entiers ≥ 0, F' un faisceau localement constant constructible de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$-modules de $X'_{\overline{\eta},\text{ét}}$. Alors, le morphisme canonique*

$$\psi_*(\mathrm{R}^i g_{\overline{\eta}*}(F')) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathscr{B}} \to \mathrm{R}^i\Theta_*(\psi'_*(F') \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathscr{B}}') \tag{1.5.6.1}$$

est un presque-isomorphisme.

On observera que les faisceaux $\mathrm{R}^i g_{\overline{\eta}*}(F)$ $(i \geq 0)$ sont localement constants constructibles sur $X_{\overline{\eta}}$ grâce aux théorèmes de changement de base propre et lisse.

Faltings a formulé la *version relative* de son principal théorème de comparaison p-adique dans **[16]** et en a très sommairement esquissé une preuve dans l'appendice. Certains arguments doivent être modifiés et la preuve donnée dans ce livre requiert bien plus de travail. Elle est basée sur une étude fine de la structure locale de certains φ-modules presque-étales qui est intéressante en elle-même (cf. 5.5.22).

***Remarque 1.5.7* (Note ajoutée le 2 décembre 2022). —** Le théorème 1.5.6 vaut en fait sous l'hypothèse plus générale que g *soit propre*. En effet, la condition de projectivité sur g est utilisée pour prouver un résultat de presque-finitude pour les modules presque-cohérents (2.8.18). Alors que dans ce texte, nous nous basons sur les résultats de finitude de [**6**] (plutôt que ceux de [**46**]), He [**36**] vient de reprendre la preuve de Kiehl ([**46**] 2.9′a) et est parvenu à étendre l'énoncé 2.8.18 aux morphismes propres.

***Remarque 1.5.8.* —** Scholze a généralisé 1.5.2 au cas des variétés rigides en utilisant la même stratégie ([**57**] 1.3). Il a également prouvé un analogue de 1.5.6 dans le cadre des espaces adiques et des topos pro-étales ([**57**] 5.12). Il le déduit du cas absolu en utilisant un théorème de changement de base dû à Huber. Notons cependant que le résultat clé de notre preuve dans le cas relatif, à savoir l'étude fine de la structure locale de certains φ-modules presque-étales, ne semble pas résulter des arguments de Scholze.

1.5.9. — Conservons les hypothèses de 1.5.6 et soit n un entier ≥ 0. Comme le morphisme canonique $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \psi'_*(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ est un isomorphisme, pour construire la suite spectrale de Hodge-Tate relative (1.4.5.2), nous sommes conduits par 1.5.6 à calculer les faisceaux de cohomologie $\mathrm{R}^q\Theta_*(\overline{\mathscr{B}}'_n)$ $(q \geq 0)$. S'inspirant du cas absolu (1.5.3), le problème est alors de trouver une factorisation naturelle de Θ, à laquelle appliquer une suite spectrale de Cartan-Leray. Considérons le diagramme commutatif de morphismes de topos

(1.5.9.1)
$$\begin{tikzcd} \widetilde{E}' \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, "\sigma'"] & \\ \widetilde{E} \times_{X_{\text{ét}}} X'_{\text{ét}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Xi"'] & X'_{\text{ét}} \arrow[d, "g"] \\ \widetilde{E} \arrow[r, "\sigma"] & X_{\text{ét}}. \end{tikzcd}$$

Nous prouvons que le produit fibré de topos $\widetilde{E} \times_{X_{\text{ét}}} X'_{\text{ét}}$ est en fait un *topos de Faltings relatif*, dont la définition est inspirée par celle des produits orientés de topos, au-delà du topos co-évanescent qui inspira déjà notre définition du topos de Faltings usuel.

1.6. Topos de Faltings relatif

1.6.1. — On conserve les hypothèses et notations de 1.5.5. On note G la catégorie des morphismes $(W \to U \leftarrow V)$ au-dessus des morphismes canoniques $X' \to X \leftarrow X_{\overline{\eta}}$, c'est-à-dire les diagrammes commutatifs

(1.6.1.1)
$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] & V \arrow[l] \arrow[d] \\ X' \arrow[r] & X & X_{\overline{\eta}}, \arrow[l] \end{tikzcd}$$

tels que W soit étale sur X', U soit étale sur X et le morphisme canonique $V \to U_{\overline{\eta}}$ soit *fini étale*. On la munit de la topologie engendrée par les recouvrements

$$\{(W_i \to U_i \leftarrow V_i) \to (W \to U \leftarrow V)\}_{i\in I} \tag{1.6.1.2}$$

des trois types suivants :

(a) $U_i = U$, $V_i = V$ pour tout $i \in I$ et $(W_i \to W)_{i\in I}$ est un recouvrement ;
(b) $W_i = W$, $U_i = U$ pour tout $i \in I$ et $(V_i \to V)_{i\in I}$ est un recouvrement ;
(c) les diagrammes

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[r] \arrow[d, equal] & U' \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Box"] & V' \arrow[l] \arrow[d] \\ W \arrow[r] & U & V \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{1.6.1.3}$$

dans lequel $U' \to U$ est un morphisme quelconque et le carré de droite est cartésien.

Le site ainsi défini est appelé *site de Faltings relatif* du morphisme $g\colon X' \to X$. On désigne par $\widetilde{G}$ et l'on appelle *topos de Faltings relatif* de g le topos des faisceaux d'ensembles sur G. C'est un analogue du produit orienté de topos $X'_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} X_{\overline{\eta},\text{ét}}$ ([**3**] VI.3).

Il existe deux morphismes canoniques de topos

$$X'_{\text{ét}} \xleftarrow{\pi} \widetilde{G} \xrightarrow{\lambda} X_{\overline{\eta},\text{fét}} , \tag{1.6.1.4}$$

définis par

$$\pi^*(W) = (W \to X \leftarrow X_{\overline{\eta}})^a, \quad \forall\, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X'}), \tag{1.6.1.5}$$

$$\lambda^*(V) = (X' \to X \leftarrow V)^a, \quad \forall\, V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/X_{\overline{\eta}}}), \tag{1.6.1.6}$$

où l'exposant ^{a} désigne le faisceau associé. Ce sont des analogues de la première et de la seconde projection du produit orienté $X'_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} X_{\overline{\eta},\text{ét}}$.

Si $X' = X$, $\widetilde{G}$ est canoniquement équivalent au topos de Faltings $\widetilde{E}$ (1.4.1). Ainsi, par fonctorialité du topos de Faltings relatif, on a une factorisation naturelle de $\Theta\colon \widetilde{E}' \to \widetilde{E}$ en

$$\widetilde{E}' \xrightarrow{\tau} \widetilde{G} \xrightarrow{\mathrm{g}} \widetilde{E}. \tag{1.6.1.7}$$

Ces morphismes s'insèrent dans le diagramme commutatif suivant de morphismes de topos

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{E}' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[dl, "\sigma'"'] \arrow[d, "\tau"] & X'_{\overline{\eta},\text{fét}} \arrow[d, "g_{\overline{\eta}}"] \\ X'_{\text{ét}} \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Box"] & \widetilde{G} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{g}"] & X_{\overline{\eta},\text{fét}} \\ X_{\text{ét}} & \widetilde{E}. \arrow[l, "\sigma"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd} \tag{1.6.1.8}$$

On démontre que *le carré inférieur gauche est cartésien* (1.5.9).

On a un morphisme canonique

$$\varrho\colon X'_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} X_{\overline{\eta},\text{ét}} \to \widetilde{G}. \tag{1.6.1.9}$$

Se donner un point de $X'_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} X_{\overline{\eta},\text{ét}}$ revient à se donner un point géométrique $\overline{x}'$ de X', un point géométrique $\overline{y}$ de $X_{\overline{\eta}}$ et un morphisme de spécialisation $\overline{y} \rightsquigarrow g(\overline{x}')$. On notera (abusivement) un tel point par $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}')$. On démontre que la famille des points $\varrho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}')$ de $\widetilde{G}$ est conservative.

1.6.2. — Soient $\overline{x}'$ un point géométrique de X', $\underline{X}'$ le localisé strict de X' en $\overline{x}'$, $\underline{X}$ le localisé strict de X en $g(\overline{x}')$. On désigne par $\underline{\widetilde{G}}$ le topos de Faltings relatif du morphisme $\underline{X}' \to \underline{X}$ induit par g, par $\underline{\lambda}\colon \underline{\widetilde{G}} \to \underline{X}_{\overline{\eta},\text{fét}}$ le morphisme canonique (1.6.1.4) et par $\Phi\colon \underline{\widetilde{G}} \to \widetilde{G}$ le morphisme de fonctorialité. Il existe une section canonique θ de $\underline{\lambda}$,

$$\begin{tikzcd} \underline{X}_{\overline{\eta},\text{fét}} \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\text{id}"'] & \underline{\widetilde{G}} \arrow[d, "\underline{\lambda}"] \\ & \underline{X}_{\overline{\eta},\text{fét}}. \end{tikzcd} \tag{1.6.2.1}$$

Nous démontrons que le morphisme de changement de base induit par ce diagramme

$$\underline{\lambda}_* \to \theta^* \tag{1.6.2.2}$$

est un isomorphisme. On pose

$$\phi_{\overline{x}'} = \theta^* \circ \Phi^*\colon \widetilde{G} \to \underline{X}_{\overline{\eta},\text{fét}}. \tag{1.6.2.3}$$

Si $\overline{y}$ est un point géométrique de $\underline{X}_{\overline{\eta}}$, on obtient naturellement un point $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}')$ de $X'_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} X_{\overline{\eta},\text{ét}}$. Alors, pour tout faisceau F de $\widetilde{G}$, on a un isomorphisme canonique et fonctoriel

$$F_{\varrho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}')} \xrightarrow{\sim} \phi_{\overline{x}'}(F)_{\overline{y}}. \tag{1.6.2.4}$$

Proposition 1.6.3 **(cf. 3.4.34).** — *Sous les hypothèses de 1.6.2, pour tout faisceau abélien F de $\widetilde{G}$ et tout $q \geq 0$, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{R}^q\pi_*(F)_{\overline{x}'} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\underline{X}_{\overline{\eta},\text{fét}}, \phi_{\overline{x}'}(F)). \tag{1.6.3.1}$$

Corollaire 1.6.4 **(cf. 6.5.17).** — *Soient $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}')$ un point de $X'_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} X_{\overline{\eta},\text{ét}}$, $\underline{X}'$ le localisé strict de X' en $\overline{x}'$, $\underline{X}$ le localisé strict de X en $g(\overline{x}')$, $\underline{g}\colon \underline{X}' \to \underline{X}$ le morphisme induit par g,*

$$\varphi'_{\overline{x}'}\colon \widetilde{E}' \to \underline{X}'_{\overline{\eta},\text{fét}} \tag{1.6.4.1}$$

le morphisme canonique analogue de (1.6.2.3). *Alors, pour tout groupe abélien F de $\widetilde{E}'$ et tout $q \geq 0$, on a un isomorphisme fonctoriel canonique*

$$(\mathrm{R}^q\tau_*(F))_{\varrho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}')} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^q\underline{g}_{\overline{\eta},\text{fét}*}(\varphi'_{\overline{x}'}(F))_{\overline{y}}. \tag{1.6.4.2}$$

1.6.5. — Considérons l'anneau suivant de $\widetilde{G}$,

$$\overline{\mathscr{B}}^{!} = \tau_*(\overline{\mathscr{B}}'). \tag{1.6.5.1}$$

On a des homomorphismes canoniques $\overline{\mathscr{B}} \to \mathrm{g}_*(\overline{\mathscr{B}}^{!})$ et $\hbar'_*(\mathscr{O}_{\overline{X}'}) \to \pi_*(\overline{\mathscr{B}}^{!})$, dans lequel $\hbar' \colon \overline{X}' \to X'$ désigne la projection canonique. Par conséquent, on peut considérer g et π comme des morphismes de topos annelés.

Pour tout point $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}')$ de $X'_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} X_{\overline{\eta},\text{ét}}$, nous démontrons que l'anneau $\overline{\mathscr{B}}^{!}_{\varrho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}')}$ est normal et strictement hensélien. De plus, l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{\overline{X}',\overline{x}'} \to \overline{\mathscr{B}}^{!}_{\varrho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}')}$ est local et injectif.

1.6.6. — Supposons que $X = \mathrm{Spec}(R)$ et $X' = \mathrm{Spec}(R')$ soient affines. Soient $\overline{y}'$ un point géométrique de $X'_{\overline{\eta}}$, $\Delta' = \pi_1(X'_{\overline{\eta}}, \overline{y}')$, $(W_j)_{j \in J}$ le revêtement universel de $X'_{\overline{\eta}}$ en $\overline{y}'$, $\overline{y} = g_{\overline{\eta}}(\overline{y}')$, $\Delta = \pi_1(X_{\overline{\eta}}, \overline{y})$, $(V_i)_{i \in I}$ le revêtement universel de $X_{\overline{\eta}}$ en $\overline{y}$. Pour tout $i \in I$, $(V_i \to X)$ est naturellement un objet de E et pour tout $j \in J$, $(W_j \to X')$ est naturellement un objet de E'. Posons

$$\overline{R} = \varinjlim_{i \in I} \overline{\mathscr{B}}(V_i \to X), \tag{1.6.6.1}$$

$$\overline{R}' = \varinjlim_{j \in J} \overline{\mathscr{B}}'(W_j \to X'). \tag{1.6.6.2}$$

On retrouve les $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-algèbres définis en (1.2.1.2). On les munit des actions naturelles de Δ et de Δ'. Pour tout $i \in I$, il existe un X'-morphisme canonique $\overline{y}' \to X' \times_X V_i$. On désigne par V'_i la composante irréductible de $X' \times_X V_i$ contenant $\overline{y}'$ et par Π_i le sous-groupe correspondant de Δ'. Alors, $(V'_j \to X')$ est naturellement un objet de E'. Posons

$$\overline{R}^{!} = \varinjlim_{i \in I} \overline{\mathscr{B}}'(V'_i \to X'), \tag{1.6.6.3}$$

$$\Pi = \bigcap_{i \in I} \Pi_i. \tag{1.6.6.4}$$

On a un homomorphisme canonique $\overline{R} \to \overline{R}^{!} \to \overline{R}'$.

Pour tout point géométrique $\overline{x}'$ et tout morphisme de spécialisation $\overline{y} \rightsquigarrow g(\overline{x}')$, nous démontrons qu'il existe un isomorphisme canonique (déterminé par le choix de $\overline{y}'$)

$$\overline{\mathscr{B}}^{!}_{\varrho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}')} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\overline{x}' \to U' \to U} \overline{R}^{!}_{U' \to U}, \tag{1.6.6.5}$$

où la limite inductive est prise sur la catégorie des morphismes $\overline{x}' \to U' \to U$ au-dessus de $\overline{x}' \to X' \to X$, avec U' affine étale sur X', U affine étale sur X et $\overline{R}^{!}_{U' \to U}$ l'anneau correspondant (1.6.6.3).

***Proposition 1.6.7* (cf. 5.2.32). —** *Conservons les hypothèses de 1.6.6 et supposons de plus que g s'insère dans un diagramme commutatif*

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{G}^{d'}_{m,S} \arrow[d, "\gamma"] \\
X \arrow[r, "\iota"] & \mathbb{G}^{d}_{m,S}
\end{tikzcd}
\tag{1.6.7.1}
$$

dans lequel les morphismes ι et ι' sont étales, d et d' sont des entiers ≥ 0 et γ est un homomorphisme de tores au-dessus de S qui est lisse (1.1.4). Soit n un entier ≥ 0. Alors,

(i) *Il existe un homomorphisme canonique de $\overline{R}^!$-algèbres graduées*

$$\wedge(\Omega^1_{R'/R} \otimes_{R'} (\overline{R}^!/p^n\overline{R}^!)(-1)) \to \bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{H}^i(\Pi, \overline{R}'/p^n\overline{R}'), \tag{1.6.7.2}$$

qui est presque-injectif et dont le conoyau est tué par $p^{\frac{1}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$.

(ii) *Le $\overline{R}^!$-module $\mathrm{H}^i(\Pi, \overline{R}'/p^n\overline{R}')$ est presque de présentation finie pour tout $i \geq 0$, et il est presque-nul pour tout $i \geq r+1$, où $r = \dim(X'/X)$.*

C'est une version relative du calcul de Faltings de la cohomologie galoisienne de $\overline{R}$ qui repose sur son théorème de presque-pureté ([**16**] Theorem 4 page 192, [**3**] II.6.16). L'énoncé peut se globaliser de la manière suivante en utilisant la théorie de Kummer sur la fibre spéciale du topos annelé $(\widetilde{E}', \overline{\mathscr{B}}')$.

***Théorème 1.6.8* (cf. 6.6.4). —** *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un homomorphisme canonique de $\overline{\mathscr{B}}^!$-algèbres graduées de $\widetilde{G}$*

$$\wedge(\pi^*(\xi^{-1}\Omega^1_{\overline{X}'_n/\overline{X}_n})) \to \bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{R}^i\tau_*(\overline{\mathscr{B}}'_n), \tag{1.6.8.1}$$

où π^* désigne l'image inverse par le morphisme de topos annelés

$$\pi\colon (\widetilde{G}, \overline{\mathscr{B}}^!) \to (X'_{\text{ét}}, \hbar'_*(\mathscr{O}_{\overline{X}'})),$$

dont le noyau (resp. conoyau) est annulé par $p^{\frac{2r}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ (resp. $p^{\frac{2r+1}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$), où $r = \dim(X'/X)$.

Considérons ensuite la suite spectrale de Cartan-Leray

$$\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{R}^i\mathrm{g}_*(\mathrm{R}^j\tau_*(\overline{\mathscr{B}}'_n)) \Rightarrow \mathrm{R}^{i+j}\Theta_*(\overline{\mathscr{B}}'_n). \tag{1.6.8.2}$$

Tenant compte de 1.6.8, pour obtenir la suite spectrale de Hodge-Tate relative (1.4.5.2), on a besoin de démontrer un théorème de changement de base relativement au diagramme cartésien

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{g}"'] & X'_{\text{ét}} \arrow[d, "g"] \\
\widetilde{E} \arrow[r, "\sigma"] & X_{\text{ét}}
\end{tikzcd}
\tag{1.6.8.3}
$$

Théorème 1.6.9 **(cf. 6.5.5).** — *Supposons que le morphisme g soit propre. Alors, pour tout faisceau abélien de torsion F de $X'_{\text{ét}}$ et tout $q \geq 0$, le morphisme de changement de base*

$$\sigma^*(\mathrm{R}^q g_*(F)) \to \mathrm{R}^q \mathsf{g}_*(\pi^*(F)) \tag{1.6.9.1}$$

est un isomorphisme.

La preuve est inspirée d'un théorème de changement de base pour les produits orientés dû à Gabber. Elle se ramène au théorème de changement de base propre pour le topos étale.

Nous avons en fait besoin d'une variante du théorème 1.6.9 pour les modules quasi-cohérents. Pour ce faire, nous enrichissons le diagramme commutatif (1.6.8.3) en un diagramme commutatif de morphismes de topos annelés

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{G}, \overline{\mathscr{B}}^!) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathsf{g}"'] & (X'_{\text{ét}}, \mathscr{O}_{X'}) \arrow[d, "g"] \\
(\widetilde{E}, \overline{\mathscr{B}}) \arrow[r, "\sigma"] & (X_{\text{ét}}, \mathscr{O}_X).
\end{tikzcd} \tag{1.6.9.2}$$

Proposition 1.6.10 **(cf. 6.5.29).** — *Pour tout entier $n \geq 0$, l'homomorphisme canonique*

$$\overline{\mathscr{B}}_n \boxtimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X'} \to \overline{\mathscr{B}}^!_n, \tag{1.6.10.1}$$

où le produit tensoriel externe d'anneaux est relatif au diagramme cartésien (1.6.8.3), *est un presque-isomorphisme.*

Théorème 1.6.11 **(cf. 6.5.31).** — *Supposons le morphisme g propre. Il existe alors un entier $N \geq 0$ tel que pour tous entiers $n \geq 1$ et $q \geq 0$, et tout $\mathscr{O}_{X'_n}$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}'$* (1.1.1.1), *le noyau et le conoyau du morphisme de changement de base* ([**1**] (1.2.3.3)) *relativement au diagramme* (1.6.9.2),

$$\sigma^*(\mathrm{R}^q g_*(\mathscr{F}')) \to \mathrm{R}^q \mathsf{g}_*(\pi^*(\mathscr{F}')), \tag{1.6.11.1}$$

où σ^* et π^* désignent les images inverses au sens des topos annelés, soient annulés par p^N.

Proposition 1.6.12 **(cf. 6.5.32).** — *Soient n, q des entiers ≥ 0, $\mathscr{F}'$ un $\mathscr{O}_{X'_n}$-module cohérent qui est X_n-plat* (1.1.1.1). *Supposons que le morphisme g soit propre et que pour tout entier $i \geq 0$, le $\mathscr{O}_{X_n}$-module $\mathrm{R}^i g_*(\mathscr{F}')$ soit localement libre (de type fini). Alors, le morphisme de changement de base relativement au diagramme* (1.6.9.2),

$$\sigma^*(\mathrm{R}^q g_*(\mathscr{F}')) \to \mathrm{R}^q \mathsf{g}_*(\pi^*(\mathscr{F}')), \tag{1.6.12.1}$$

où σ^* et π^* désignent les images inverses au sens des topos annelés, est un presque-isomorphisme.

1.6.13. — Soient n, q des entiers ≥ 0. Comme le morphisme canonique

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \psi'_*(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme, on obtient à partir de 1.5.6, pour tout $q \geq 0$, un morphisme canonique

$$\psi_*(\mathrm{R}^q g_{\overline{\eta}*}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathscr{B}} \to \mathrm{R}^q\Theta_*(\overline{\mathscr{B}}'_n), \tag{1.6.13.1}$$

qui est un presque-isomorphisme. La suite spectrale de Hodge-Tate relative (1.4.5.2) se déduit alors de la suite spectrale de Cartan-Leray (1.6.8.2) en utilisant 1.6.8 et 1.6.11.