Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ALEURS SPÉCIALES DE PARAMÈTRES DIAGRAMMES DE DIAMOND

Yongquan Hu

Tome 144
Fascicule 1

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 77-115

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 144, janvier 2016

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`smf@smf.univ-mrs.fr`

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € ($ 291)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Bull. Soc. math. France
144 (1), 2016, p. 77–115

VALEURS SPÉCIALES DE PARAMÈTRES DE DIAGRAMMES DE DIAMOND

PAR YONGQUAN HU

RÉSUMÉ. — Soit L une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ une représentation continue réductible et suffisamment générique. Suivant la démarche de [6], on montre comment relier le type d'extension de $\overline{\rho}$ à certains paramètres définissant les diagrammes de Diamond associés à $\overline{\rho}$.

ABSTRACT (*Special values of parameters in Diamond diagrams*)
Let L be a finite unramified extension of $\mathbb{Q}_p$ and $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ be a reducible continuous generic representation. Following the strategy in [6], we show how the extension type of $\overline{\rho}$ is related to certain parameters which appear in the Diamond diagrams associated to $\overline{\rho}$.

1. Introduction

Soient p un nombre premier et L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ avec $\mathcal{O}_L$ son anneau des entiers. La correspondance de Langlands locale modulo p pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est maintenant bien comprise ([1], [2], [11]), mais celle pour $\mathrm{GL}_2(L)$ lorsque $L \neq \mathbb{Q}_p$ reste encore largement mystérieuse. Dans ce cas, l'un des principaux obstacles est l'existence de beaucoup plus de représentations (modulo p ou p-adiques) de $\mathrm{GL}_2(L)$ que de représentations de dimension 2 (modulo p ou p-adiques) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$. Par exemple, lorsque L

Texte reçu le 27 novembre 2012, révisé le 14 juin 2013, accepté le 6 juin 2014.

YONGQUAN HU

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E50, 11F85, 11F70.

Mots clefs. — Correspondance de Langlands mod p, poids de Serre, diagrammes de Diamond.

est non ramifiée sur $\mathbb{Q}_p$, inspirés par les travaux de Buzzard, Diamond et Jarvis ([9]), Breuil et Paškūnas ont construit des représentations lisses admissibles sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\mathrm{GL}_2(L)$ satisfaisant une certaine condition sur les $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$-socles (voir [8]). Mais cela est loin de permettre d'isoler une unique représentation, comme démontre l'auteur [13].

Pourtant, en fixant une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, on espère pouvoir ajouter de « bonnes » conditions restrictives du coté $\mathrm{GL}_2(L)$ à celle portant sur le socle, pour améliorer la sélection. Jusqu'à présent (à la connaissance de l'auteur), les conditions exhibées vivent toutes dans les diagrammes de Diamond associés à la représentation galoisienne (donc toujours pour L non ramifiée). La première condition de ce genre a été définie dans [4], motivée par la compatibilité souhaitée avec un possible foncteur de Colmez généralisé ([11],[16]).

Une deuxième condition est considérée dans [6], et fait aussi l'objet du présent article. Pour expliquer plus clairement notre situation, nous rappelons brièvement la construction de diagrammes de Diamond d'après [8]. Supposons L non ramifiée sur $\mathbb{Q}_p$ et fixons une représentation continue $\overline{\rho}:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)\to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ que l'on suppose suffisamment générique (à préciser dans le texte). A $\overline{\rho}$ sont associés un ensemble de poids de Serre noté $\mathscr{D}(\overline{\rho})$ ainsi qu'une $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$-représentation $D(\overline{\rho})$ de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dont le socle est exactement $\bigoplus_{\tau\in\mathscr{D}(\overline{\rho})}\tau$ et qui est maximale pour une certaine condition de multiplicité 1. Notons $I(\mathcal{O}_L)$ le sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$ et $I_1(\mathcal{O}_L)$ le pro-p-sous-groupe de $I(\mathcal{O}_L)$. En tant que $I(\mathcal{O}_L)$-représentation, l'espace des $I_1(\mathcal{O}_L)$-invariants de $D(\overline{\rho})$ est une somme directe de caractères qui apparaissent par paires stables sous la conjugaison par $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)$. On peut donc y définir une action de $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)$, mais elle n'est pas unique a priori. Un diagramme de Diamond associé à $\overline{\rho}$ est alors simplement l'injection naturelle $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}\hookrightarrow D(\overline{\rho})$, pour une action de $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)$ sur $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ choisie.

On peut classifier les actions possibles de $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)$ sur $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ (à isomorphisme près) à l'aide de certains paramètres (voir §6). Mais dès que $\overline{\rho}$ est réductible *non scindée*, la donnée de $\mathscr{D}(\overline{\rho})$, ou de $D(\overline{\rho})$, contient moins d'informations que la représentation $\overline{\rho}$ de départ. Nous voulons donc relier la classe d'isomorphisme de $\overline{\rho}$ aux paramètres définissant l'action de $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)$ sur $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$.

Décrivons les paramètres qui nous intéressent dans cet article. Rappelons que $D(\overline{\rho})$ se décompose sous la forme $\bigoplus_{\tau\in\mathscr{D}(\overline{\rho})}D_\tau(\overline{\rho})$, où $D_\tau(\overline{\rho})$ est l'unique facteur direct de $D(\overline{\rho})$ de socle τ. Soit χ un caractère de $I(\mathcal{O}_L)$ apparaissant sur $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ et soit $v\in D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ un vecteur propre de caractère χ. Sous l'action d'un élément dans $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$ d'une forme particulière mais explicite (voir la proposition 2.6), v engendre un vecteur dans $\tau^{I_1}\hookrightarrow D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$, que l'on note w_1 pour l'instant. Si le conjugué χ^s de χ par $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)$ apparaît aussi sur $D_\tau(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$, on obtient un autre vecteur non nul w_2 de τ^{I_1} à partir de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)v$. Comme τ^{I_1} est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, w_1 et w_2 diffèrent par un scalaire non nul $x(\chi) \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, dont on vérifie qu'il ne dépend pas du choix de v. C'est par définition le paramètre associé à χ. En général, il existe des diagrammes de Diamond avec $x(\chi)$ prenant n'importe quelle valeur de $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Dans [6], lorsque χ et χ^s apparaissent tous les deux sur la « première » composante $D_{\tau(\varnothing)}(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ de $D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$, une valeur de $x(\chi)$ d'intérêt « particulier » est isolée. Dans l'article présent, nous traitons le cas général en suivant la démarche de [6]. On définit aussi des paramètres cycliques comme dans [4] et l'on montre que si $|\mathscr{D}(\overline{\rho})| = 1$, les valeurs spéciales que l'on trouve sont alors exactement celles prédites dans [4, §6].

Les énoncés des résultats principaux de l'article nécessitant l'introduction de trop nombreuses de notations, nous préférons de ne pas les rappeler dans cette introduction mais renvoyer le lecteur aux théorèmes 4.7 et 5.6 pour plus de détails. Expliquons quand même d'où vient l'idée. La représentation $\overline{\rho}$ admet plusieurs déformations potentiellement Barsotti-Tate qui deviennent cristallines sur une extension modérément ramifiée de L et de type d'inertie associé à χ, donc correspondant par la correspondance de Langlands locale classique à des séries principales modérément ramifiées de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit Π une telle série principale. En admettant l'existence d'une compatibilité local-global modulo p pour $\mathrm{GL}_2(L)$, la donnée de $\overline{\rho}$ devrait correspondre à celle de la réduction d'un certain réseau $\mathrm{GL}_2(L)$-invariant de Π. En général, les réseaux $\mathrm{GL}_2(L)$-invariants de Π (lorsqu'ils existent) sont très difficiles à décrire, mais nous n'avons heureusement pas besoin ici de les décrire explicitement, et le paramètre qui nous intéresse ne dépend pas du choix du réseau, sous réserve qu'il se trouve dans la réduction modulo p dudit réseau.

Le plan de l'article est le suivant. Au §2, on fait quelques rappels et l'on démontre la proposition 2.1, dans laquelle on détermine une condition exacte sur $\chi \in D(\overline{\rho})^{I_1(\mathcal{O}_L)}$ pour que le paramètre associé soit bien défini. Au §3, on calcule la représentation galoisienne résiduelle associée à un module fortement divisible avec donnée de descente modérément ramifiée. Cette partie est essentiellement une relecture des calculs effectués dans [5]. On démontre le résultat principal de cet article au §4. Au §5, on définit et calcule des paramètres cycliques analogues à ceux définis dans [4]. Enfin au §6, on détermine le nombre de paramètres nécessaires à classifier les diagrammes de Diamond associés à $\overline{\rho}$.

Introduisons les notations générales de l'article.

Dans tout le texte, L désigne une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré f, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_L$ et E désigne une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (qui sera le corps des coefficients) d'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$ et de corps résiduel k_E. On suppose