Mémoires
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 109
Nouvelle série

MEASURED QUANTUM GROUPOIDS

Franck LESIEUR

2 0 0 7

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Comité de rédaction

Jean BARGE
Emmanuel BREUILLARD
Gérard BESSON
Antoine CHAMBERT-LOIR
Jean-François DAT
Charles FAVRE
Daniel HUYBRECHTS
Yves LE JAN
Laure SAINT-RAYMOND
Wilhem SCHLAG
Raphaël KRIKORIAN (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 27 € ($ 40)
Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € ($ 435)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2007*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-233-4

Directrice de la publication : Aline BONAMI

MÉMOIRES DE LA SMF 109

MEASURED QUANTUM GROUPOIDS

Franck Lesieur

Société Mathématique de France 2007
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

F. Lesieur
LMNO, Université de Caen, BP 5186, F-14032 Caen Cedex.
E-mail : `franck.lesieur@math.unicaen.fr`
Url : `http://www.math.unicaen.fr/~lesieur`

2000 ***Mathematics Subject Classification.*** – 46LXX.

Key words and phrases. – Quantum groupoids; antipode; pseudo-multiplicative unitary.

The author is mostly indebted to Michel Enock, Stefaan Vaes, Leonid Vaĭnerman and Jean-Michel Vallin for many fruitful conversations.

MEASURED QUANTUM GROUPOIDS

Franck Lesieur

Abstract. – In this volume, we give a definition for measured quantum groupoids. We want to get objects with duality extending both quantum groups and groupoids. We base ourselves on J. Kustermans and S. Vaes' works about locally compact quantum groups that we generalize thanks to formalism introduced by M. Enock and J.M. Vallin in the case of inclusion of von Neumann algebras. From a structure of Hopf-bimodule with left and right invariant operator-valued weights, we define a fundamental pseudo-multiplicative unitary. To get a satisfying duality in the general case, we assume the existence of an antipode given by its polar decomposition. This theory is illustrated with many examples among others inclusion of von Neumann algebras (M. Enock) and a sub family of measured quantum groupoids with easier axiomatic.

***Résumé* (Groupoïdes quantiques mesurés).** – Dans cet volume, on définit une notion de groupoïdes quantiques mesurés. On cherche à obtenir des objets munis d'une dualité qui étend celle des groupoïdes et des groupes quantiques. On s'appuie sur les travaux de J. Kustermans et S. Vaes concernant les groupes quantiques localement compacts qu'on généralise grâce au formalisme introduit par M. Enock et J.M. Vallin à propos des inclusions d'algèbres de von Neumann. À partir d'un bimodule de Hopf muni de poids opératoriels invariants à gauche et à droite, on définit un unitaire pseudo-multiplicatif fondamental. Pour obtenir une dualité satisfaisante dans le cas général, on suppose l'existence d'une antipode définie par sa décomposition polaire. Cette théorie est illustrée dans une dernière partie par de nombreux exemples notamment les inclusions d'algèbres de von Neumann (M. Enock) et une sous famille de groupoïdes quantiques mesurés à l'axiomatique plus simple.

© Mémoires de la Société Mathématique de France 109, SMF 2007

CONTENTS

1. Introduction 1
1.1. Historic 1
1.2. Aims and Methods 2
1.3. Study plan 3

2. Recalls 5
2.1. Weights and operator-valued weights [**Str81**], [**Tak03**] 5
2.2. Spatial theory [**Co80, Sau83b, Tak03**] 6
2.3. Relative tensor product [**Co80**], [**Sau83b**], [**Tak03**] 8
2.4. Fiber product [**Val96**], [**EV00**] 12
2.5. Slice map [**Eno00**] 13
2.5.1. For normal forms 13
2.5.2. For conditional expectations 13
2.5.3. For weights 13
2.5.4. For operator-valued weights 14

3. Fundamental pseudo-multiplicative unitary 15
3.1. Definitions 15
3.2. Construction of the fundamental isometry 16
3.3. Fundamental isometry and co-product 21
3.4. Commutation relations 23
3.5. Unitarity of the fundamental isometry 24
3.5.1. First technical result 25
3.5.2. Second technical result 26
3.5.3. Reciprocity law 28
3.6. Pseudo-multiplicativity 31
3.7. Right leg of the fundamental unitary 35

Part I. Measured quantum groupoids 37

..... 39

4. Definition 41

5. Uniqueness, modulus and scaling operator 45

5.1. Definitions of modulus and scaling operators 45
5.2. First result of uniqueness for invariant operator-valued weight 47
5.3. Properties of the modulus 50
5.4. Uniqueness of invariant operator-valued weight 54

6. A density theorem 57

7. Manageability of the fundamental unitary 63

8. Duality 67
8.1. Dual structure 67
8.2. Bi-duality theorem 79
8.3. Heisenberg's relations 81

Part II. Examples 83

..... 85

9. Adapted measured quantum groupoids 87
9.1. Definitions 87
9.2. Antipode 88
9.2.1. The operator G 88
9.2.2. A fundamental commutation relation 92
9.2.3. Scaling group 95
9.2.4. The antipode and its polar decomposition 100
9.2.5. Characterization of the antipode 100
9.3. Uniqueness, modulus and scaling operator 108
9.4. Characterization 114

10. Groupoids 117

11. Finite quantum groupoids 121

12. Quantum groups 123

13. Compact case 125

14. Quantum space quantum groupoid 129
14.1. Definition 129
14.2. Fundamental elements 130
14.3. Dual structure 133

15. Pairs quantum groupoid 137
15.1. Definition 137
15.2. Fundamental elements 138
15.3. Dual structure 141

16. Inclusions of von Neumann algebras 145

17. Operations on adapted measured quantum groupoids 149
17.1. Elementary operations 149
17.1.1. Sum of adapted measured quantum groupoids 149
17.1.2. Tensor product of adapted measured quantum groupoids 149
17.1.3. Direct integrals of adapted measured quantum groupoids 150
17.2. Opposite and commutant structures 150

Bibliography 155