

Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 114
Nouvelle série

**MEASURED
QUANTUM
GROUPOIDS
IN ACTION**

2 0 0 8

Michel ENOCK

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Comité de rédaction

Jean BARGE	Charles FAVRE
Emmanuel BREUILLARD	Daniel HUYBRECHTS
Gérard BESSON	Yves LE JAN
Antoine CHAMBERT-LOIR	Laure SAINT-RAYMOND
Jean-François DAT	Wilhem SCHLAG
Raphaël KRIKORIAN (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 27 € (\$40)
Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € (\$435)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2008

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X
ISBN 978-2-85629-265-5

Directrice de la publication : Aline BONAMI

MEASURED QUANTUM GROUPOIDS
IN ACTION

Michel Enock

Société Mathématique de France 2008

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Michel Enock

Institut de Mathématiques de Jussieu, Unité Mixte Paris 6 / Paris 7 / CNRS de
Recherche 7586, 175, rue du Chevaleret, Plateau 7E, F-75013 Paris.

E-mail : `enock@math.jussieu.fr`

2000 *Mathematics Subject Classification.* – 46L55, 46L89.

Key words and phrases. – measured quantum groupoids, actions, crossed-product, bi-
uality theorem, depth 2 inclusions.

MEASURED QUANTUM GROUPOIDS IN ACTION

Michel Enock

Abstract. – Franck Lesieur had introduced in his thesis (now published in an expended and revised version in the *Mémoires de la SMF* (2007)) a notion of measured quantum groupoid, in the setting of von Neumann algebras and a simplification of Lesieur’s axioms is presented in an appendix of this article. We here develop the notions of actions, crossed-product, and obtain a biduality theorem, following what had been done by Stefaan Vaes for locally compact quantum groups. Moreover, we prove that the inclusion of the initial algebra into its crossed-product is depth 2, which gives a converse of a result proved by Jean-Michel Vallin and the author. More precisely, to any action of a measured quantum groupoid, we associate another measured quantum groupoid. In particular, starting from an action of a locally compact quantum group, we obtain a measured quantum groupoid canonically associated to this action; when the action is outer, this measured quantum groupoid is the initial locally compact quantum group.

Résumé (Actions d’un groupoïde quantique mesuré). – Frank Lesieur a introduit dans sa thèse (maintenant publiée dans une version révisée et complétée dans les *Mémoires de la SMF* (2007)) une notion de groupoïde quantique mesuré, dans le cadre des algèbres de von Neumann, et une simplification des axiomes de Lesieur est placée en appendice de cet article. Nous développons ici les notions d’action d’un groupoïde quantique mesuré, de produit-croisé et un théorème de bidualité est démontré, en s’inspirant largement de ce qui a été fait par Stefaan Vaes pour les groupes quantiques localement compacts. Ainsi, nous prouvons que l’inclusion de l’algèbre initiale dans son produit croisé est de profondeur 2, ce qui fournit une réciproque à un résultat démontré par Jean-Michel Vallin et l’auteur. De plus, à toute action d’un groupoïde quantique mesuré, on associe un autre groupoïde quantique mesuré; ainsi, en particulier, on construit un groupoïde quantique mesuré associé canoniquement à toute action d’un groupe quantique localement compact; quand cette action est extérieure, ce groupoïde quantique mesuré est le groupe quantique initial.

CONTENTS

1. Introduction	1
1.1.	1
1.2.	1
1.3.	2
1.4.	2
1.5.	2
1.6.	2
2. Preliminaries	5
2.1. Spatial theory [5], [31], [34]	5
2.2. Jones' basic construction and operator-valued weights; depth 2 inclusions	8
2.2.1. Proposition	9
2.2.2. Lemma	10
2.3. Relative tensor product [5], [31], [34]	10
2.4. Fiber product [35], [15]	14
2.5. Slice maps [8]	15
2.6. Vaes' Radon-Nikodym theorem	17
3. Measured quantum groupoids	19
3.1. Definition	19
3.2. Definition	21
3.3. Algebras and Hopf-bimodules associated to a pseudo-multiplicative unitary	22
3.4. Fundamental example	23
3.5. Definitions ([20], [21])	24
3.6. Theorem([20], [21])	24
3.7. Definitions	25
3.8. Theorem ([21], [11])	26
3.9. Notations	28
3.10. Theorem ([21])	28
3.11. Theorem ([21])	30
3.12. Theorem([21])	31
3.13. Example	32
3.14. Example	32

3.15. Theorem([15], [8] 8.2 and 8.3)	33
4. Left invariance revisited	35
4.1. Definitions and notations	35
4.2. Lemma	36
4.3. Lemma	36
4.4. Definitions and lemma	37
4.5. Proposition	38
4.6. Proposition	39
4.7. Proposition	41
4.8. Theorem	42
4.9. Proposition	42
4.10. Proposition	43
4.11. Proposition	44
4.12. Theorem	46
5. Corepresentations of measured quantum groupoids	47
5.1. Definition	47
5.2. Theorem	48
5.3. Corollary	49
5.4. Proposition	49
5.5. Proposition	51
5.6. Example	51
5.7. Proposition	52
5.8. Proposition	52
5.9. Proposition	53
5.10. Theorem	53
5.11. Theorem	54
6. Actions of measured quantum groupoids	55
6.1. Definition	55
6.2. Example	56
6.3. Example	56
6.4. Example	56
6.5. Example	56
6.6. Proposition	57
6.7. Theorem	57
6.8. Proposition	58
6.9. Definition	59
6.10. Example	59
6.11. Definition	59
6.12. Proposition	59
6.13. Proposition	60

6.14. Definition	60
7. Some technical properties of actions	61
7.1. Definition	61
7.2. Proposition	61
7.3. Definition	62
7.4. Lemma	62
7.5. Lemma	63
7.6. Proposition	64
7.7. Proposition	64
7.8. Corollary	65
8. The standard implementation of an action: the case of a δ-invariant weight	67
8.1. Definition	67
8.2. Example	68
8.3. Lemma	68
8.4. Proposition	69
8.5. Proposition	71
8.6. Theorem	73
8.7. Lemma	74
8.8. Theorem	75
8.9. Corollary	78
8.10. Corollary	79
8.11. Corollary	79
9. Crossed-product and dual actions	81
9.1. Definition	81
9.2. Example	81
9.3. Example	81
9.4. Theorem	82
9.5. Example	83
9.6. Example	83
9.7. Proposition	83
9.8. Theorem	84
9.9. Definition	84
9.10. Lemma	85
9.11. Proposition	85
9.12. Lemma	86
10. An auxilliary weight on the crossed-product	89
10.1. Proposition	89
10.2. Proposition	90
10.3. Proposition	91

10.4. Lemma	92
10.5. Proposition	93
10.6. Corollary	94
10.7. Theorem	95
10.8. Theorem	95
10.9. Proposition	96
10.10. Definition	96
10.11. Proposition	96
10.12. Corollary	96
11. Biduality	97
11.1. Lemma	97
11.2. Proposition	98
11.3. Proposition	100
11.4. Proposition	101
11.5. Theorem	102
11.6. Theorem	103
11.7. Theorem	104
11.8. Theorem	105
11.9. Theorem	105
11.10. Remark	105
12. Characterization of crossed-products	107
12.1. Notations	107
12.2. Lemma	107
12.3. Theorem	109
12.4. Corollary	111
12.5. Corollary	112
13. Dual weight; bidual weight; depth 2 inclusion associated to an action	113
13.1. Definition	113
13.2. Example	113
13.3. Theorem	114
13.4. Theorem	114
13.5. Proposition	115
13.6. Lemma	116
13.7. Theorem	116
13.8. Theorem	118
13.9. Theorem	119
13.10. Theorem	120
13.11. Remark	121