Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 124
Nouvelle série

CHANGEMENT DE BASE ET INDUCTION AUTOMORPHE POUR GL_n EN CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

Guy HENNIART, Bertrand LEMAIRE

2 0 1 1

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 30 € ($ 45)
Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € ($ 435)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-85629-311-9

Directrice de la publication : Aline BONAMI

MÉMOIRES DE LA SMF 124

CHANGEMENT DE BASE ET INDUCTION AUTOMORPHE POUR GL_n EN CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

Guy Henniart

Bertrand Lemaire

Société Mathématique de France 2011

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Guy Henniart
Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay,
UMR 8628 du CNRS, F–91405 Orsay Cedex.
E-mail : `guy.henniart@math.u-psud.fr`

Bertrand Lemaire
Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206 du CNRS,
Université Aix-Marseille II, Case Postale 907, F–13288 Marseille Cedex 9.
E-mail : `lemaire@iml.univ-mrs.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** – 22E50.

Mots-clefs. – corps local non archimédien, caractéristique non nulle, groupe linéaire, représentation admissible, correspondance de Langlands locale, changement de base local, induction automorphe locale; algèbre de Hecke sphérique, isomorphisme de Satake, extension non ramifiée, lemme fondamental pour le changement de base (resp. pour l'induction automorphe); σ-intégrale orbitale, caractère σ-tordu, représentation σ-discrète, fonction élémentaire, application norme, identité "à la Shintani"; κ-intégrale orbitale, caractère κ-tordu, représentation κ-discrète, facteur de transfert, identité de caractères, modèle de Whittaker; corps de fonctions, représentation automorphe, groupe de Weil, correspondance de Langlands globale, changement de base global, induction automorphe globale.

CHANGEMENT DE BASE ET INDUCTION AUTOMORPHE POUR GL_n EN CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

Guy Henniart, Bertrand Lemaire

Résumé. – Soit E/F une extension cyclique de corps (commutatifs) locaux ou globaux, de degré fini d. La théorie du changement de base de $\mathrm{GL}_n(F)$ à $\mathrm{GL}_n(E)$ et celle de l'induction automorphe de $\mathrm{GL}_m(E)$ à $\mathrm{GL}_{md}(F)$ sont deux illustrations du principe de fonctorialité de Langlands: pour F local, elles correspondent côté galoisien à la restriction des représentations de W'_F à W'_E et à l'induction des représentations de W'_E à W'_F, où W'_F désigne le groupe Weil-Deligne de F, W'_E celui de E. Si F est une extension finie d'un corps p-adique $\mathbb{Q}_p$, ces deux théories existent depuis longtemps (Arthur-Clozel, Henniart-Herb). On les étend dans ce mémoire au cas où F est un corps localement compact non archimédien de caractéristique non nulle. On montre aussi, pour un corps global de fonctions F, que ces deux théories locales sont compatibles aux applications globales de changement de base et d'induction automorphe déduites, via la correspondance de Langlands établie par Lafforgue, de la restriction et de l'induction des représentations galoisiennes globales.

Abstract **(Base change and automorphic induction for GL_n in positive characteristic)**

Let E/F be a finite cyclic extension of local or global fields, of degree d. The theory of base change from $\mathrm{GL}_n(F)$ to $\mathrm{GL}_n(E)$ and the theory of automorphic induction from $\mathrm{GL}_m(E)$ to $\mathrm{GL}_{md}(F)$ are two instances of Langlands' functoriality principle: when F is local, they correspond respectively to restriction to E of representations of the Weil-Deligne group of F, and induction to F of representations of the Weil-Deligne group of E. If F is a finite extension of a p-adic field $\mathbb{Q}_p$, these theories were established long ago (Arthur-Clozel, Henniart-Herb). In this memoir we extend them to the case where F is a non-Archimedean locally compact field of positive characteristic. We also prove, for a global functions field F, that these two local theories are compatible with the global maps of base change and automorphic induction deduced, via the Langlands correspondence proved by Lafforgue, from restriction and induction of global Galois representations.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1

I. Le lemme fondamental pour le changement de base pour GL_n sur un corps local de caractéristique non nulle 5
- I.1. Introduction 5
- I.2. Transfert des fonctions à support régulier 10
- I.3. Le lemme fondamental pour les unités de $\mathscr{H}_E$ et de $\mathscr{H}_F$ 24
- I.4. Transfert des fonctions élémentaires de Labesse 26
- I.5. Séparation des représentations sphériques 28
- I.6. Le lemme fondamental pour toutes les fonctions de $\mathscr{H}_E$ et de $\mathscr{H}_F$ 39

II. Sur le changement de base local pour GL_n 55
- II.1. Introduction 55
- II.2. Fonctions concordantes et identités de caractères 61
- II.3. Classification de Bernstein-Zelevinski (rappels) 78
- II.4. Des séries discrètes aux représentations génériques 81
- II.5. Pseudo-coefficients des séries σ-discrètes 100
- II.6. Une méthode globale 118

III. Formules de caractères pour l'induction automorphe, II 137
- III.1. Introduction 137
- III.2. Identités de caractères 139
- III.3. Réduction au cas des séries discrètes et normalisation 143
- III.4. Utilisation de la formule des traces 152

IV. Sur le changement de base et l'induction automorphe pour les corps de fonctions 163
- IV.1. Introduction 163
- IV.2. Représentations de groupes de Weil et de groupes de Galois 167
- IV.3. Les résultats de Lafforgue, Laumon, Rapoport et Stuhler 173
- IV.4. Le cas du changement de base 179
- IV.5. Le cas de l'induction automorphe 182

Bibliographie 185

INTRODUCTION

Le changement de base et l'induction automorphe pour le groupe linéaire sont deux illustrations du principe de fonctorialité de Langlands qui peuvent s'exprimer en termes de la correspondance de Langlands. Dans le cas qui nous intéresse principalement, le corps de base F est un corps commutatif localement compact non archimédien, et la correspondance de Langlands [**31, 36, 58**] relie les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$ aux représentations de dimension n du groupe de Weil-Deligne W'_F de F. Si l'on fixe une extension cyclique E/F, de degré fini d, le *changement de base* de $\mathrm{GL}_n(F)$ à $\mathrm{GL}_n(E)$ correspond, via la correspondance de Langlands, à la restriction des représentations de W'_F au sous-groupe W'_E, et l'*induction automorphe* de $\mathrm{GL}_m(E)$ à $\mathrm{GL}_{md}(E)$ correspond à l'induction à W'_F des représentations de W'_E. Bien entendu, l'intérêt est de construire a priori changement de base et induction automorphe, sans passer par la correspondance de Langlands; d'ailleurs, quand F est de caractéristique nulle, les deux constructions sont utilisées pour établir la correspondance! Les constructions directes décrivent changement de base et induction automorphe en termes d'identités de caractères — pour des précisions, voir ci-dessous.

Si F est de caractéristique nulle, les théories du changement de base et de l'induction automorphe existent depuis longtemps: elles sont dues à Arthur-Clozel [**1**] pour la première, à Henniart-Herb [**38**] pour la seconde. Il y a quelques années, nous avons décidé d'étendre ces deux théories au cas où F est un corps localement compact non archimédien de caractéristique non nulle. En effet — c'est la motivation principale de ce travail — Bushnell et Henniart utilisent les identités de caractères correspondantes, en caractéristique quelconque, dans leur travail commun [**11**] sur la correspondance de Langlands locale explicite.

Signalons une autre application possible de ce travail. Pour F de caractéristique nulle, les travaux de Labesse et Langlands [**53**] sur $\mathrm{SL}_2(F)$ ont récemment été généralisés à $\mathrm{SL}_n(F)$ par Hiraga et Saito [**42**]. Ce mémoire devrait permettre d'étendre tout cela au cas où F est de caractéristique non nulle.

Le projet d'étendre les théories du changement de base et de l'induction automorphe à la caractéristique non nulle est désormais achevé. La rédaction comporte sept parties. Les trois premières sont déjà publiées [**39, 40, 41**], tandis que les quatre suivantes ont été regroupées dans ce mémoire, dont elles forment les quatre chapitres — on s'y référera par **I**, ..., **IV**:

— Chapitre I: *Le lemme fondamental pour le changement de base pour* GL_n *sur un corps local de caractéristique non nulle.*

— Chapitre II: *Sur le changement de base local pour* GL_n.

— Chapitre III: *Formules de caractères pour l'induction automorphe, II.*

— Chapitre IV: *Sur le changement de base et l'induction automorphe pour les corps de fonctions.*

Suivant le conseil de l'éditeur, nous nous sommes efforcés de les faire ressembler à des chapitres d'un "vrai"mémoire, plutôt qu'à une collection d'articles. En particulier nous avons unifié les notations et les références — ces dernières sont regroupées dans une bibliographie commune en fin d'ouvrage —, et éliminé autant que faire se peut les redites. Chacun des chapitres a conservé néanmoins une relative indépendance et peut être lu séparément, ce qui représente aussi un avantage. L'objet final est, on l'espère, d'une lecture agréable.

Pour préciser les identités de caractères exprimant changement de base et induction automorphe, fixons aussi un générateur σ du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$, et un générateur κ du groupe $\mathfrak{K}(E/F)$ des caractères complexes lisses de $F^\times$ qui sont triviaux sur le groupe des normes $N_{E/F}(E^\times)$.

La théorie du changement de base est une application de relèvement $\pi \mapsto \pi_E$ entre classes d'isomorphisme de représentations (complexes, lisses) irréductibles π de $\mathrm{GL}_n(F)$ et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles *σ-stables* π_E de $\mathrm{GL}_n(E)$: une représentation Π de $\mathrm{GL}_n(E)$ est dite σ-stable si elle isomorphe à $\Pi^\sigma = \Pi \circ \sigma$. Cette application est caractérisée, si π est tempérée — ou même, plus généralement, générique unitaire — par une identité de caractères reliant le caractère σ-tordu de $\Pi = \pi_E$ au caractère ordinaire de π: fixé un isomorphisme A entre Π et Π^σ, il existe une constante $c = c(\pi, \Pi, A) \neq 0$ telle que

$$\Theta_\Pi^A(\delta) = c\Theta_\pi(\gamma)$$

pour toute paire d'éléments réguliers (δ, γ) de $\mathrm{GL}_n(E) \times \mathrm{GL}_n(F)$ tels que γ soit conjugué dans $G(E)$ à $N(\delta) = \delta\delta^\sigma \cdots \delta^{\sigma^{d-1}}$; ici Θ_Π^A désigne la fonction caractère associée à la distribution $\mathrm{tr}(\Pi \circ A)$ sur $\mathrm{GL}_n(E)$, et Θ_π celle associée à la distribution $\mathrm{tr}(\pi)$ sur $\mathrm{GL}_n(F)$.

De même, la théorie de l'induction automorphe est une application de relèvement $\pi \mapsto \pi^F$ entre classes d'isomorphisme de représentations irréductibles π de $\mathrm{GL}_m(E)$ et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles *κ-stables* π^F de $\mathrm{GL}_{md}(F)$: une représentation Π de $\mathrm{GL}_{md}(F)$ est dite κ-stable si elle isomorphe à $\kappa\Pi = \Pi \otimes (\kappa \circ \det)$.