

Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 125/126
Nouvelle série

CHAMPS DE HURWITZ

J. BERTIN & M. ROMAGNY

2 0 1 1

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Comité de rédaction

Jean BARGE	Charles FAVRE
Emmanuel BREUILLARD	Daniel HUYBRECHTS
Gérard BESSON	Yves LE JAN
Antoine CHAMBERT-LOIR	Laure SAINT-RAYMOND
Jean-François DAT	Wilhem SCHLAG
Raphaël KRIKORIAN (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 50 € (\$ 75)
Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € (\$ 435)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2011

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X
ISBN 978-85629-333-1

Directrice de la publication : Aline BONAMI

CHAMPS DE HURWITZ

José Bertin
Matthieu Romagny

J. Bertin

Institut Fourier, Université Grenoble 1, France.

E-mail : jose.bertin@ujf-grenoble.fr

M. Romagny

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 6, France.

E-mail : romagny@math.jussieu.fr

Classification mathématique par sujets (2000). – 14H10, 14H30, 14H37, 14A20, 14C17; 11G20, 11G30, 14C40.

Mots-clefs. – Courbe algébrique, revêtement, revêtement galoisien, champ de Hurwitz, compactification, structure de niveau, Riemann-Hurwitz, revêtement cyclique, classes tautologiques.

Nous remercions les organisateurs de la semaine thématique *Groupes de Galois arithmétiques et différentiels* au CIRM (Luminy) en Mars 2004, durant laquelle plusieurs exposés furent consacrés aux espaces de Hurwitz, et qui a servi de point de départ à la présente rédaction. Même si la gestation de ce travail a été lente, et peut-être à cause de cela, nous avons bénéficié d’incitations et sollicitations répétées de nombreux collègues. Nous tenons à les remercier tous pour leur patience et leur bienveillance. Enfin, nous remercions les rapporteurs, dont les nombreuses remarques ont permis d’améliorer grandement la qualité de ce travail.

CHAMPS DE HURWITZ

José Bertin, Matthieu Romagny

Résumé. – Dans ce travail, nous effectuons une étude détaillée des champs de Hurwitz et de leurs espaces de modules, tant dans le cas galoisien que dans le cas non galoisien, avec une attention particulière portée aux correspondances entre ces espaces de modules. Nous comparons notre construction à celles proposées par Abramovich-Corti-Vistoli, Harris-Mumford, et Mochizuki-Wewers. Nous mettons en application nos résultats pour revisiter des exemples classiques, notamment les champs de courbes stables munies d’une structure de niveau arbitraire, et les champs de revêtements cycliques modérément ramifiés. Dans une deuxième partie, nous mettons en évidence des fibrés tautologiques et des classes de cohomologie qui vivent naturellement sur les champs de Hurwitz, et nous donnons des relations universelles, dont un analogue supérieur de la formule de Riemann-Hurwitz, entre ces classes. Nous donnons des applications au champ des revêtements cycliques de la droite projective, avec un intérêt particulier pour des relations du type de la relation de Cornalba-Harris et pour les intégrales de Hodge cycliques, notamment hyperelliptiques.

Abstract (Hurwitz stacks). – In this work, we give a thorough study of Hurwitz stacks and associated Hurwitz moduli spaces, both in the Galois and the non Galois case, with particular attention to correspondances between these moduli spaces. We compare our construction to those proposed by Abramovich-Corti-Vistoli, Harris-Mumford, and Mochizuki-Wewers. We apply our results to revisit some classical examples, particularly the stacks of stable curves equipped with an arbitrary level structure, and the stacks of tamely ramified cyclic covers. In a second part we exhibit some tautological bundles and cohomology classes naturally living on Hurwitz stacks, and give some universal relations, in particular a higher analogue of the Riemann-Hurwitz formula, between these classes. Applications are given to the stack of cyclic covers of the projective line, with special attention to Cornalba-Harris type relations and to cyclic, in particular hyperelliptic, Hodge integrals.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	9
Conventions et Notations	13
2. Classification des revêtements	15
2.1. Actions de groupes et revêtements	15
2.1.1. Revêtements, G -courbes, G -revêtements	15
2.1.2. Classification des revêtements	16
2.2. Donnée de Hurwitz	18
2.2.1. Donnée de Hurwitz : Définition	18
2.2.2. Opérations sur les données de Hurwitz	19
2.3. Nombre de Nielsen	21
2.3.1. Classification topologique	21
2.3.2. Nombre de Nielsen	23
3. Familles de G-courbes lisses et Théorème de Chevalley-Weil	29
3.1. Géométrie du diviseur de branchement	29
3.1.1. Diviseurs de points fixes	29
3.1.2. Ramification et branchement	31
3.2. Inversion de la formule de Chevalley-Weil	33
3.2.1. Formule de Chevalley-Weil	34
3.2.2. Inversion des relations de Chevalley-Weil	36
4. Familles de G-courbes stables	41
4.1. Actions stables, revêtements stables	41
4.1.1. Courbes stables et stables marquées	41
4.1.2. Actions stables	43
4.1.3. Collision des points de branchement : étude locale	49
4.1.4. Géométrie du quotient par une action stable	51
4.2. Collision des points de ramification	52
4.2.1. G -type d'un G -diviseur	52
4.2.2. Chevalley-Weil (bis repetita)	53
4.3. Courbes stables marquées et actions de groupes	57
5. Déformations des revêtements modérément ramifiés	61

5.1. Déformations équivariantes des courbes	61
5.1.1. La déformation universelle	61
5.1.2. Stabilité de la courbe quotient	66
5.1.3. Déformations équivariantes versus déformations du diviseur de branchement	68
5.2. Modèle stable marqué d'un G -revêtement	69
6. Champs de Hurwitz	75
6.1. G -champs et champs quotients	75
6.1.1. Quotient d'un champ par une action de groupe	76
6.1.2. 2-quotient ou rigidification	80
6.2. Champs de Hurwitz : cas galoisien	81
6.2.1. Définition des champs de Hurwitz	81
6.2.2. Fonctorialité des champs de Hurwitz	83
6.3. Compactification stable du champ de Hurwitz (I)	84
6.4. Compactification du schéma de Hurwitz : Gieseker-Mumford	86
6.5. Compactification stable du champ de Hurwitz (II)	88
6.5.1. Le champ de Hurwitz versus Harris-Mumford	88
6.5.2. Le revêtement « universel »	91
6.6. Champs de Hurwitz : cas non galoisien	93
6.6.1. Revêtements admissibles	93
6.6.2. Clôture galoisienne : cas des courbes lisses	94
6.6.3. Clôture galoisienne : courbes stables	98
6.6.4. Le morphisme discriminant : cas général	103
7. Graphes et revêtements	107
7.1. Graphes modulaires de Hurwitz	107
7.2. Graphes de groupes et revêtements de graphes	109
7.2.1. Graphes modulaires quotients	109
7.2.2. Un exemple : le bord du schéma de Hurwitz « classique »	113
7.2.3. Revêtements ramifiés de graphes	116
7.3. Groupe de Picard et revêtements	118
7.3.1. Sous-groupes de décomposition et d'inertie	118
7.3.2. Faisceaux sans torsion de rang 1 et revêtements stables	121
7.4. Stratification canonique du bord	125
7.4.1. Stratification du bord	125
7.4.2. Type topologique d'un point du bord	130
8. Structures de niveau sur les courbes stables	133
8.1. Structures de niveau sur les courbes lisses	133
8.2. Structures de niveau sur les courbes stables	136
8.3. Le niveau abélien (n)	139
8.3.1. Groupes de décomposition et d'inertie	139
8.3.2. Composantes irréductibles du bord	141

9. Revêtements cycliques	149
9.1. Revêtements cycliques versus racines d'un faisceau inversible	149
9.1.1. Racines et quasi-racines d'un faisceau inversible	149
9.1.2. Description des revêtements cycliques	150
9.2. Revêtements cycliques stables	153
9.2.1. Revêtements cycliques stables et quasi-racines d'un faisceau inversible	153
9.2.2. Composantes irréductibles du bord	157
9.3. Revêtements cycliques de $\mathbb{P}^1$	159
9.3.1. Quelques calculs de torseurs	159
9.3.2. Interlude : Géométrie du discriminant des formes binaires	162
9.3.3. Le champ des revêtements cycliques de la droite projective	166
10. Classes tautologiques	169
10.1. Fibré de Hodge	169
10.1.1. G -fibrés vectoriels sur le champ de Hurwitz	169
10.1.2. Décomposition du fibré de Hodge	172
10.2. Les fibrés en droites $\psi_{i,x}$ et $\mu_{i,v}$	176
10.3. Relations de Riemann-Hurwitz d'ordre supérieur	178
10.3.1. Calculs dans l'anneau de Chow	178
10.3.2. Relations de Riemann-Hurwitz d'ordre supérieur	181
10.3.3. Faisceaux inversibles associés aux composantes du bord	184
10.4. Appliquer le théorème de Riemann-Roch	188
10.4.1. Mise en place du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch (GRR)	188
10.4.2. Termes de bord	192
10.5. La relation de Cornalba-Harris revisitée	201
10.5.1. Les faisceaux inversibles ψ et μ dans le cas cyclique	201
10.5.2. Relation de Cornalba-Harris	202
10.5.3. Intégrales de Hodge-Hurwitz hyperelliptiques	206
Index	211
Bibliographie	213

