Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ALGÈBRES DE LIE DE DIMENSION INFINIE ET THÉORIE DE LA DESCENTE

Numéro 129

Nouvelle série

Wilhelm Alexander STEINMETZ ZIKESCH

2 0 1 2

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs 2012

Vente au numéro : 32 € ($ 48)

Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € ($ 435)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-349-2

Directrice de la publication : Alice BONAMI

MÉMOIRES DE LA SMF 129

ALGÈBRES DE LIE DE DIMENSION INFINIE ET THÉORIE DE LA DESCENTE

Wilhelm Alexander Steinmetz Zikesch

Société Mathématique de France 2012
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Wilhelm Alexander Steinmetz Zikesch
Laboratoire de Mathématiques, Bât. 425, Université Paris-Sud XI, 91405 Orsay (France).
E-mail : alexander.steinmetz@gmail.com

Mots clefs. **—** Algèbre de Lie de dimension infinie, EALA, anneau de polynômes de Laurent, cohomologie galoisienne, groupe algébrique linéaire classique, algèbre d'Azumaya à involution, forme hermitienne, théorie de Witt triangulaire.

ALGÈBRES DE LIE DE DIMENSION INFINIE ET THÉORIE DE LA DESCENTE

Wilhelm Alexander Steinmetz Zikesch

Résumé. — Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et soit R un anneau de polynômes de Laurent en deux variables sur k. La motivation principale derrière ce travail est une classe d'algèbres de Lie de dimension infinie sur k, appelées *extended affine Lie algebras* (EALAs). Ces algèbres correspondent à des torseurs sous des groupes algébriques linéaires sur R. Dans ce travail nous classifions les R-torseurs sous les groupes classiques de rang assez grand pour les types A extérieur, B, C, D et pour le type A intérieur sous des hypothèses plus fortes. Ainsi, nous pouvons déduire des résultats sur des EALAs. Nous obtenons aussi une réponse affirmative à une variante de la conjecture II de Serre pour l'anneau R : tout R-torseur lisse sous un groupe semi-simple simplement connexe de rang assez grand de type classique B, C et D est trivial.

Abstract. — Let k be an algebraically closed field of characteristic zero and let R be the Laurent polynomial ring in two variables over k. The main motivation behind this work is a class of infinite dimensional Lie algebras over k, called *extended affine Lie algebras* (EALAs). These algebras correspond to torsors under algebraic groups over R. In this work we classify R-torsors under classical groups of large enough rank for outer type A and types B, C, D, as well as for inner type A under stronger hypotheses. We can thus deduce results on EALAs. We also obtain a positive answer to a variant of Serre's Conjecture II for the ring R: every smooth R-torsor under a semi-simple simply connected R-group of large enough rank of classical type B, C, D is trivial.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction 1
1.1. Résultat principal 1
1.2. Algèbres de Lie de dimension infinie 2
1.3. Structure de ce travail 4
1.4. Conventions et notations 4

2. Généralités et préliminaires 7
2.1. Géométrie algébrique et modules 7
2.2. Algèbres d'Azumaya et groupe de Brauer 8
2.3. Formes hermitiennes, groupe de Witt et théorèmes de simplification 10
2.4. Involutions sur les algèbres d'Azumaya 14

3. Les conjectures 23
3.1. Classes de lacets 24
3.2. Formes d'algèbres sur des anneaux de polynômes de Laurent 26
3.3. Les conjectures 27

4. Le cas $^1A_{n-1}$ et les groupes orthogonaux 29
4.1. Le cas $^1A_{n-1}$ 29
4.2. Le cas des groupes orthogonaux 34

5. Le cas C_n, les autres groupes du type D_n et le cas ^2A_n 39
5.1. Conventions, notations et préliminaires 39
5.2. La suite spectrale de S. Gille pour les algèbres d'Azumaya à involution de première espèce 41
5.3. La suite spectrale de S. Gille pour les schémas à involution de deuxième espèce 46
5.4. Le cas C_n 49
5.5. Les autres groupes du type D_n 56
5.6. Le cas $^2A_{n-1}$ 67

6. La conjecture B 73

A. Compatibilité de la théorie de Morita avec la suite spectrale de S. Gille 81

A.1. Énoncé du théorème 83

A.2. L'existence du foncteur de Morita F 86

A.3. Le cas général 89

Bibliographie 95

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. Résultat principal

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, par exemple $k = \mathbb{C}$. Soit $R_2 = k[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ l'anneau de polynômes de Laurent sur k. Ce travail porte sur la classification des torseurs sous les groupes algébriques classiques (i.e. les groupes de types A_{n-1} et B_n $(n \geq 2)$ C_n $(n \geq 3)$ et D_n $(n \geq 4)$ sauf ${}^{3,6}D_4$).

Fixons une famille compatible de racines n-ièmes de l'unité primitives $(\zeta_n)_{n \geq 1}$, i.e. pour tout $\ell \geq 1$, $\zeta_{\ell n}^{\ell} = \zeta_n$. Notons $A(s,t)$ $(s, t \geq 1)$ la R_2-algèbre d'Azumaya définie par les relations

$$X^t = t_1, \; Y^t = t_2^s \quad \text{et} \quad XY = \zeta_n YX.$$

Disons que le R_2-schéma en groupes semi-simples simplement connexe $\mathbf{G}$ satisfait à la condition (*), si $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_1(A(s,t))$ avec $\mathrm{pgcd}(s,t) > 2$.

Alors le théorème principal de ce travail est le suivant :

Théorème 1.1. — *Soit $\mathbf{G}$ un R_2-schéma en groupes semi-simples simplement connexe de type :*

1) ${}^1A_{n-1}$ *satisfaisant à* (*),
2) ${}^2A_{n-1}$ $(n \geq 7)$,
3) C_n $(n \geq 6)$,
4) ${}^{1,2}D_n$ $(n \geq 8)$.

Alors $H^1_{\text{ét}}(R_2, \mathbf{G}) = 1$ où ét est la topologie étale sur R_2.

Remarque 1.2. — Pour $\mathbf{G} = \mathbf{Spin}(q)$, où q est une R_2-forme quadratique de rang ≥ 5, on a également $H^1(R_2, \mathbf{G}) = 1$. La trivialité de cet ensemble découle d'un travail de Parimala [**47**], voir [**21**, Cor. 6.3]. On a donc $H^1(R_2, \mathbf{G}) = 1$ également pour $\mathbf{G}$ de type B_n $(n \geq 2)$ et pour certains $\mathbf{G}$ de type ${}^{1,2}D_n$ $(n \geq 4)$.

L'ensemble $H^1_{\text{ét}}(R_2, \mathbf{G})$ classifie les torseurs ou espaces principaux homogènes sous le R_2-schéma en groupes $\mathbf{G}$ (voir [**31**, III] ou [**43**, III.4] et le début du chapitre 2). Observons l'analogie de ce théorème avec la conjecture II de Serre [**53**, Conj. II] :

Conjecture II. — *Soit F un corps parfait de dimension cohomologique* 2 *et soit* $\mathbf{G}$ *un F-schéma en groupes semi-simples simplement connexe, alors* $H^1_{\text{ét}}(F, \mathbf{G}) = 1$.

Le corps de fractions $K := k(t_1, t_2)$ de R_2 est de dimension cohomologique 2. Par un théorème de de Jong [**35**] l'indice et l'exposant dans le groupe de Brauer coïncident sur K. Il suit qu'en utilisant ce théorème, par [**54**, th. 1.3 et 2.1] — pour le cas où $\mathbf{G}$ est sans facteur de type E_8 — et par [**21**, Thm. 2.5] — pour le cas où $\mathbf{G}$ contient un tel facteur — la conjecture II est vraie pour $F = K$. On peut alors voir le théorème 1.1 comme une variante « globale » de cette conjecture pour K. Notons qu'il y a une obstruction à ce que la conjecture II soit vraie pour l'anneau R_2 pour groupes de tous les types : l'ensemble $H^1_{\text{ét}}(R_2, \mathbf{SL}_1(A(1, n)))$ n'est trivial pour aucun $n > 1$ (voir [**21**, Prop. 3.20 et Rem. 3.23] et chapitre 3.3). Par contre il y a l'espoir que les autres bornes puissent être améliorées : la trivialité de $H^1_{\text{ét}}(R_2, \mathbf{SL}_1(A(s, t)))$ pour $\text{pgcd}(s, t) = 2$, et de $H^1_{\text{ét}}(R_2, \mathbf{G})$ pour $\mathbf{G}$ de type ${}^2A_{n-1}$ (avec $2 \leq n \leq 6$) C_n (avec $3 \leq n \leq 5$) et ${}^{1,2}D_n$ (avec $4 \leq n \leq 7$, et $\mathbf{G}$ n'étant pas le groupe des spineurs d'une R_2-forme quadratique) reste une conjecture (cf. [**21**, Conj. 6.1] et chapitre 3.3).

1.2. Algèbres de Lie de dimension infinie

À part la relation avec la conjecture II de Serre, les torseurs sur $\operatorname{Spec} R_2$ ont une relation importante avec une certaine classe d'algèbres de Lie de dimension infinie sur $\mathbb{C}$, appelées *extended affine Lie algebras* (EALAs) (cf. section 3.3, [**1**] et [**45**]). Pour préciser cette relation présentons le cas général pour les anneaux de polynômes de Laurent à m variables et introduisons la notion d'une *algèbre de multi-lacets*.

Soit donc $R_m = k[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_m^{\pm 1}]$. Fixons $(\zeta_n)_{(n \geq 1)}$ une famille compatible de n-racines de l'unité ($\zeta_{\ell n}^{\ell} = \zeta_n$). Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie simple, de dimension infinie. Soit $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}_k(\mathfrak{g})$ son groupe de k-automorphismes. Notons également $\mathbf{G}$ le groupe de R_m-automorphismes de la R_m-algèbre $\mathfrak{g} \otimes_k R_m$. Étant donnée une famille $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ d'automorphismes d'ordre fini de la k-algèbre $\mathfrak{g}$ qui commutent, on peut construire une k-algèbre $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma)$, dite *algèbre de multi-lacets* associée à cette donnée (voir section 3.2.1 et [**21**, 5.1]). Cette k-algèbre est de dimension finie vue comme R_m-algèbre, et en fait, elle est une R_m-forme de $\mathfrak{g}^{(1)}$. Il suit que l'on peut lui attacher un torseur qui définie une classe dans l'ensemble de cohomologie $H^1(R_m, \mathbf{G})$ (si $\mathbf{G}$ est un k-groupe semi-simple$^{(2)}$, cette classe correspond à des *torseurs de lacets* (ou

$^{(1)}$ Strictement, elle est une R_m-forme de $\mathfrak{g} \otimes_k R_m$, mais ce petit abus de notation sera utilisé tout au long de ce travail.

$^{(2)}$ Dans le sens de Borel [**12**].