

MÉMOIRES DE LA SMF 89

**K -THÉORIE ET MULTIPLICITÉS
DANS $L^2(G/\Gamma)$**

François Pierrot

Société Mathématique de France 2002

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

F. Pierrot

École Normale Supérieure, DMA, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris.

E-mail : pierrot@dma.ens.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F72, 19K14, 19K35, 22D10, 43-99, 46L08.

Mots clefs. — Traces densément définies, K -théorie, indice L^2 , séries discrètes.

K -THÉORIE ET MULTIPLICITÉS DANS $L^2(G/\Gamma)$

François Pierrot

Résumé. — On démontre une version généralisée du théorème d'indice L^2 d'Atiyah concernant les opérateurs elliptiques équivariants sur des revêtements galoisiens de variétés compactes, dans le cadre de la K -théorie de Baum-Connes. En utilisant des résultats récents de K -théorie d'algèbres de groupes, ceci nous permet de démontrer les formules de multiplicités des séries discrètes intégrables dans les espaces homogènes de sous-groupes discrets cocompacts sans torsion, dans le cadre des groupes de Lie semi-simples (résultat dû à R.P. Langlands), mais également dans le cadre p -adique.

Abstract (K -theory and multiplicities in $L^2(G/\Gamma)$). — We prove a generalized version of the L^2 -index theorem of Atiyah concerning equivariant elliptic operators on coverings of compact manifolds, in the context of the Baum-Connes conjecture. Using recent results on the K -theory of group algebras, this enables us to compute the multiplicities of integrable discrete series in the homogeneous spaces of discrete torsionless and cocompact subgroups, in the case of semisimple Lie groups (a result due to R.P. Langlands), but also in the p -adic case.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. Traces densément définies et K-théorie	5
1.1. Rappels algébriques	5
1.2. Traces densément définies sur les C^* -algèbres et K -théorie	7
1.3. Traces sur les C^* -algèbres et C^* -modules	10
1.4. Accouplement entre les opérateurs A -Fredholm et les traces densément définies sur A	19
2. Γ-trace	23
2.1. Traces sur les multiplicateurs	23
2.2. Notion de Γ -trace	25
2.3. Cas propre	37
3. Une généralisation en K-théorie du théorème d'indice L^2 d'Atiyah	47
3.1. La conjecture de Baum-Connes	47
3.2. Représentants sommables et support	51
3.3. Théorème d'indice L^2 en K -théorie	61
4. Propriétés de fonctorialité pour les sous-groupes discrets cocompacts et théorème à la Langlands en K-théorie	65
4.1. Traces associées aux groupes localement compacts unimodulaires	65
4.2. Fonctorialité de la trace	66
4.3. Fonctorialité de l'application de Baum-Connes pour les sous-groupes cocompacts	68
4.4. Théorème à la Langlands en K -théorie	72
5. Conjecture de Bost et formule de Langlands	75
5.1. Séries discrètes	75
5.2. Formules de multiplicités	77
5.3. Cas des représentations intégrables	79
Bibliographie	83

INTRODUCTION

L'objet de ce mémoire est de démontrer un théorème dans le cadre de la K -théorie des C^* -algèbres de groupes qui affirme l'égalité de deux morphismes sur l'image de l'application de Baum-Connes : d'une part celui induit par la représentation quasi-régulière d'un sous-groupe discret cocompact sans torsion, d'autre part, celui induit après normalisation, par la trace usuelle, et d'en déduire des généralisations des formules de multiplicité de Langlands ([**Lan**]).

Soit G un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar dg . L'algèbre involutive $C_C(G)$ admet une représentation λ dite *régulière* par opérateurs bornés sur $L^2(G)$ et $C_r^*(G)$ désigne la fermeture normique de $\lambda(C_C(G))$. La conjecture de Baum-Connes ([**B-C**], [**B-C-H**]) porte sur la K -théorie de la C^* -algèbre $C_r^*(G)$. Soit $\underline{E}G$ l'espace classifiant les actions propres de G et $K_{\text{top}}^*(G)$ la K -homologie G -équivariante de $\underline{E}G$. Dans [**B-C-H**], est définie l'application d'assemblage ou application de Baum-Connes $\mu_r : K_{\text{top}}^* \rightarrow K_*(C_r^*(G))$ et la conjecture de Baum-Connes affirme que c'est un isomorphisme.

Le principe est que l'espace $K_{\text{top}}^*(G)$ est en général plus simple à calculer. Si G est un groupe de Lie semisimple, K un compact maximal (en supposant pour simplifier que la représentation de K sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ est spinorielle), on peut identifier de façon naturelle $K_{\text{top}}^*(G)$ à l'anneau des représentations de K . De l'autre côté, $K_*(C_r^*(G))$ fournit des informations sur les représentations unitaires de G faiblement contenues dans la régulière, même quand G n'est pas de type I . Supposons que G est unimodulaire. Rappelons qu'on appelle *série discrète* de G la classe d'une sous-représentation irréductible de $L^2(G)$ et qu'une représentation unitaire irréductible π de G est une série discrète ssi elle possède un vecteur ξ non nul tel que $\int_G |\langle \xi, g\xi \rangle|^2 dg < +\infty$ (on dit que la série discrète est de plus intégrable s'il existe ξ tel que $\int |\langle \xi, g\xi \rangle| dg < +\infty$). Il existe alors une constante $d_\pi > 0$ appelée dimension formelle de π telle que pour tout vecteur ξ de la représentation, on a $\int_G |\langle \xi, g\xi \rangle|^2 dg = d_\pi^{-1} \|\xi\|^2$. Si π est isolée dans le dual réduit de G (ce qui est le cas pour toute série discrète, si G est presque connexe

d'après [G], $C_r^*(G)$ contient $\mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)$ en facteur donc $K_0(C_r^*(G))$ contient une copie de $\mathbb{Z}$ attachée à la série discrète (on notera $x_\pi \in K_0(C_r^*(G))$ son générateur).

Soit Γ un sous-groupe discret cocompact de G . Les formules de multiplicité évoquées ci-dessus concernent la représentation par translation à gauche de G dans $L^2(G/\Gamma)$. Celle-ci se décompose en une somme directe hilbertienne de représentations irréductibles. Le célèbre résultat de R.P. Langlands est le suivant :

THÉORÈME 0.1 ([Lan]). — *Soit Γ un réseau cocompact sans torsion d'un groupe de Lie semisimple G , π une série discrète intégrable de G , alors la multiplicité de π dans $L^2(G/\Gamma)$ est égale à $d_\pi \text{vol}(G/\Gamma)$.*

Rappelons que la démonstration de Langlands consiste à appliquer la formule des traces de Selberg à un coefficient de matrice intégrable et à utiliser les résultats d'annulation d'intégrales orbitales pour les éléments semisimples.

Pour étudier cette multiplicité, on est amené à étudier la C^* -algèbre maximale notée $C^*(G)$ de G , *i.e.* celle dont le spectre est constitué de toutes les représentations irréductibles unitaires de G et non pas seulement de celles qui sont faiblement contenues dans la régulière. Il existe également une application d'assemblage $\mu : K_{\text{top}}^*(G) \rightarrow K_*(C^*(G))$ pour la C^* -algèbre maximale de G telle que $\lambda_* \circ \mu = \mu_r$, où $\lambda_* : K_*(C^*(G)) \rightarrow K_*(C_r^*(G))$ est le morphisme induit par le quotient $\lambda : C^*(G) \rightarrow C_r^*(G)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce mémoire (théorème 5.2.2) :

THÉORÈME 0.2. — *Soit G un groupe localement compact unimodulaire, π une série discrète de G isolée dans $\widehat{G}_r$, et $x_\pi \in K_0(C_r^*(G))$ l'élément associé. Soit Γ un sous-groupe discret cocompact sans torsion de G , σ une représentation unitaire de Γ de dimension N finie et $\text{Ind}_\Gamma^G(\sigma)$ la représentation unitaire induite de G . Soit $C_\pi \in K_{\text{top}}^*(G)$ tel que $\mu_r(C_\pi) = x_\pi$. On a :*

$$(\text{Ind}_\Gamma^G(\sigma))_*(\mu(C_\pi)) = N \text{vol}(G/\Gamma) d_\pi.$$

L'existence (et l'unicité) d'un tel élément C_π est postulée par la conjecture de Baum-Connes pour G . Cette conjecture est maintenant démontrée pour une vaste classe de groupes : les groupes de Lie réductifs (A. Wassermann [Wa]), les groupes réductifs sur un corps p -adique (V. Lafforgue [L]) et les groupes moyennables (N. Higson, G. Kasparov [H-K]).

Supposons de plus que π est isolée dans $\widehat{G}$ de sorte que $C^*(G)$ contient une copie de $\mathbf{K}$ attachée à la série discrète. Soit $p_\pi \in K_0(C^*(G))$ l'élément associé. Clairement, $\lambda_*(p_\pi) = x_\pi$.

COROLLAIRE 0.1. — *Si $\mu(C_\pi) = p_\pi$, alors on a :*

$$m(\pi, \Gamma, \sigma) = N \operatorname{vol}(G/\Gamma) d_\pi.$$

Dans le cas où la série discrète est isolée dans $\widehat{G}$ (ce qui est toujours le cas si π est intégrable), d'après le corollaire précédent, il suffit pour démontrer la formule de Langlands, de savoir que p_π est dans l'image de μ . Toutefois, la conjecture de Baum-Connes postule seulement que $\lambda_*(p_\pi)$ est dans l'image $\lambda_* \circ \mu$. Quand λ_* est injective, c'est suffisant. Compte tenu des travaux de Higson-Kasparov ([**H-K**]), on en déduit (théorème 5.2.3) :

COROLLAIRE 0.2. — *Soit G un groupe localement compact unimodulaire moyennable (ou T -moyennable) et π une série discrète isolée dans $\widehat{G}$, alors :*

$$m(\pi, \Gamma, \sigma) = N \operatorname{vol}(G/\Gamma) d_\pi.$$

Une conjecture de Bost implique que pour un groupe localement compact G , l'image de μ est égal à l'image de $K_*(L^1(G))$ dans $K_*(C^*(G))$. Si π est intégrable, p_π est dans l'image de $K_*(L^1(G))$.

Dans [**L**] et [**L2**], V. Lafforgue démontre la conjecture de Bost pour une vaste classe $\mathcal{C}'$ de groupes localement compacts (stable par sous-groupe fermé) qui comprend tous les groupes de Lie semisimples, les groupes réductifs sur les groupes p -adiques, et les groupes moyennables. On en déduit (théorème 5.3.5) :

COROLLAIRE 0.3. — *Soit G un groupe localement compact unimodulaire, Γ un sous-groupe discret cocompact sans torsion dans la classe $\mathcal{C}'$, π une représentation intégrable de G , σ une représentation unitaire de dimension N de Γ . Alors on a la formule des multiplicités :*

$$m(\pi, \Gamma, \sigma) = N \operatorname{vol}(G/\Gamma) d_\pi.$$

La démonstration du théorème 0.2 repose sur l'analyse des traces densément définies sur les C^* -algèbres et des applications qu'elles induisent en K -théorie (chapitres 1 et 2). En effet, une trace t densément définie sur une C^* -algèbre induit une trace algébrique sur un idéal dense qui a même K -théorie que A (proposition 1.2.3) d'où une application $t_* : K_0(A) \rightarrow \mathbb{C}$. L'exemple qui nous intéresse en premier lieu est le cas d'un groupe localement compact unimodulaire. Il existe alors ([**D1**]) une unique trace sci t^G telle que $\forall f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, on a $t^G(f^*f) = \|f\|^2$. Quand π est une série discrète isolée dans le dual réduit de G , alors pour tout vecteur ξ unitaire de π , la fonction p définie par $\forall g \in G$, $p(g) = d_\pi \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$ est dans $C_r^*(G)$, $[p] = [x_\pi]$ et par définition, $t^G(p) = p(e) = d_\pi$. Compte tenu de ceci, le théorème 0.2 est un cas particulier du suivant (théorème 4.4.1) :

THÉORÈME 0.3. — *Soit G un groupe localement compact, Γ un sous-groupe discret sans torsion cocompact. Soit σ une représentation unitaire de Γ de dimension N .*

Alors on a :

$$(\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\sigma))_* \circ \mu = N \mathrm{vol}(G/\Gamma) \times (t^G)_* \circ \mu.$$

Ce théorème découle :

(1) d'un théorème abstrait énoncé dans [H] qui affirme que pour un groupe discret sans torsion la trace usuelle sur $C^*(\Gamma)$ donnée par l'évaluation en l'identité induit la même application en K -théorie que le morphisme associé à la représentation triviale sur l'image de l'application de Baum-Connes. Le fait que $t_*^\Gamma(x) = (\varepsilon_\Gamma)_*(x)$ quand $x \in K_0(C^*(\Gamma))$ est l'indice équivariant ([B-C-H]) d'un opérateur pseudodifférentiel Γ -équivariant sur un revêtement galoisien de groupe Γ d'une variété compacte, est une reformulation abstraite du théorème d'indice L^2 d'Atiyah. Nous montrons que pour un groupe discret sans torsion, tout élément de l'image de l'application de Baum-Connes est un tel indice équivariant (proposition 3.1.7) et nous démontrons une version à coefficient de ce théorème (chapitre 3, théorème 3.3.4). Ceci nous amène à étudier la notion de Γ -trace (définie à l'origine par M.F. Atiyah [A]) dans le cadre abstrait des modules hilbertiens (chapitre 2).

(2) d'une propriété de fonctorialité de la trace pour les sous-groupes cocompacts, que nous démontrons au chapitre 4. Soit Γ un sous-groupe discret cocompact d'un groupe G localement compact. Soit $\sigma_\Gamma^G : K_*(C^*(G)) \rightarrow K_*(C^*(\Gamma))$ le morphisme associé à l'induction. Alors on a :

$$(t^\Gamma)_* \circ \sigma_\Gamma^G = \mathrm{vol}(G/\Gamma) (t^G)_*.$$

(3) d'une propriété de fonctorialité de l'application de Baum-Connes pour les sous-groupes cocompacts (théorème 4.3.5).

Notons qu'une représentation irréductible π dans la série discrète d'un groupe localement compact G peut être isolée dans $\widehat{G}_r$ sans l'être dans $\widehat{G}$ (ceci se produit déjà pour $G = SL_2(\mathbb{R})$). Le théorème 0.2 fournit néanmoins une formule à la Langlands pour toutes les séries discrètes des groupes localement compacts presque connexes vérifiant la conjecture de Baum-Connes. Cette formule ne permet pas de calculer directement la multiplicité $m(\pi, \Gamma, \sigma)$ mais la relie aux multiplicités d'autres représentations (non faiblement contenues dans la représentation régulière). En particulier, on obtient une explication géométrique des formules pour les séries discrètes non intégrables des groupes $SO(n, 1)$.

Remerciements. — Je remercie vivement Georges Skandalis, sous la direction duquel j'ai réalisé ma thèse de doctorat, d'où est tiré cet article, ainsi que Joel Bellaïche et Vincent Lafforgue.