

MÉMOIRES DE LA SMF 90

**OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE POUR
DES SYSTÈMES SEMI-LINÉAIRES
AVEC INVARIANCE DE JAUGE**

Pierre-Yves Jeanne

Société Mathématique de France 2002

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

P.-Y. Jeanne

Université Paris-Sud, Bât. 425, Mathématiques, 91405 Orsay cedex, France.

E-mail : pierre-yves.jeanne@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 78A05, 81T13, 58G17, 58G35, 35L70, 35Q75.

Mots clefs. — Optique géométrique, développements WKB, invariance de jauge, invariance relativiste, EDP hyperboliques non linéaires, équation de Yang-Mills, équation de Dirac, équation des ondes.

Travaux supportés par une bourse de thèse DGA/CNRS, allocation de recherches n° 5901798/C16.

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE POUR DES SYSTÈMES SEMI-LINÉAIRES AVEC INVARIANCE DE JAUGE

Pierre-Yves Jeanne

Résumé. — L'objet de cet article est de justifier le recours à des méthodes de type « optique géométrique » pour une large classe de systèmes d'équations de champs semi-linéaires, invariants à la fois par transformations de Lorentz et par changements de jauge. Nous construisons explicitement des familles de solutions approchées d'un système modèle, couplant un champ de jauge (équation de Yang-Mills) avec un champ scalaire (équation des ondes) et un champ de spineurs (équation de Dirac), sous forme de développements oscillant à haute fréquence, monophasés, d'amplitude maximale. Nous justifions ensuite notre démarche en prouvant l'existence de solutions exactes, qui prolongent asymptotiquement les développements oscillants obtenus. Les potentiels de Yang-Mills, champ scalaire et champ de spineurs ainsi générés ne restent uniformément bornés que dans — respectivement — $H^{1/2}$, $H^{1/2}$ et L^2 . L'obtention de solutions oscillantes de forte amplitude montre que le système étudié peut conserver un comportement non linéaire stable pour toute une classe de champs de très faible régularité.

Abstract (Geometric optics for gauge invariant semilinear systems)

In this article, we justify the use of “geometric optics” like methods for a large class of semilinear systems of field equations, that remain invariant under gauge and Lorentz transforms.

In a first time, we consider a model system, coupling a gauge field (Yang-Mills equation) with a scalar field (wave equation) and a spinor field (Dirac equation), and build families of approximate solutions in the shape of single phase expansions, rapidly oscillating at high frequency. Amplitude of such oscillations is maximal with regard to their frequency parameter. Expansions are given to any order.

In a second time, we give exact solutions that remain asymptotic to previous oscillatory expansions. Such solutions may be uniformly bounded only in $H^{1/2}$, $H^{1/2}$ and L^2 — respectively for gauge, scalar and spinor fields.

We give a stability result in the case where oscillatory solutions are obtained as high frequency perturbations of a given smooth solution of the system. It shows that the system can keep a stable nonlinear behaviour, even for very low regularity fields, when nonlinear terms usually lead to destructive interactions.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. Résultats et formalisme	5
1.1. Formalisme géométrique, système modèle (YM)	5
1.2. Présentation des résultats, problème de Cauchy oscillant pour le système (YM)	14
1.3. Quelques remarques préliminaires quant à la structure des équations	15
2. Construction de familles de solutions approchées de (YM) sous forme de développements oscillant à haute fréquence, monophasés, et d'amplitude maximale	29
2.1. Choix d'une fonction de phase	30
2.2. Recherche d'équations de profils à jauge libre	41
2.3. Résolution des équations de profils	82
3. Prolongement asymptotique des familles de solutions approchées par des familles de solutions exactes	111
3.1. Estimations bilinéaires	112
3.2. Résultat d'existence pour un système modèle	130
3.3. Démonstration du théorème 3	139
3.4. Conclusion, stabilité des solutions régulières de (YM) par perturbations oscillantes	146
Appendice A	151
Appendice B	157
Bibliographie	159

INTRODUCTION

L'objet de cet article est de justifier le recours à des méthodes de type « optique géométrique » pour une large classe de systèmes d'équations de champs semi-linéaires, invariants à la fois par transformations de Lorentz et par changements de jauge. Nous construisons explicitement des familles de solutions approchées d'un système modèle, couplant un champ de jauge (équation de Yang-Mills) avec un champ scalaire (équation des ondes) et un champ de spineurs (équation de Dirac), sous forme de développements oscillant à haute fréquence, monophasés, d'amplitude maximale. Nous justifions ensuite notre démarche en prouvant l'existence de solutions exactes, qui prolongent asymptotiquement les développements oscillants obtenus. Les potentiels de Yang-Mills, champ scalaire et champ de spineurs ainsi générés ne restent uniformément bornés que dans — respectivement — $H^{1/2}$, $H^{1/2}$ et L^2 . L'obtention de solutions oscillantes de forte amplitude montre que le système étudié peut conserver un comportement non linéaire stable pour toute une classe de champs de très faible régularité.

Développement et justification d'une méthode de type « optique géométrique » pour des systèmes semi-linéaires présentant une invariance de jauge. — Les premières tentatives de construire des solutions oscillantes à haute fréquence pour des systèmes hyperboliques d'équations aux dérivées partielles quasi-linéaires remontent à l'article [3] d'Y. Choquet-Bruhat, en 1969. Le but à l'époque était de modifier les développements en ondes planes, utilisés avec succès dans le cas linéaire et célèbres sous le nom de développements « W.K.B. » ou d'optique géométrique, pour donner aux physiciens et aux numériciens des outils plus généraux qui permettent de calculer des développements asymptotiques formels d'équations aux dérivées partielles non linéaires, ou de modéliser les interactions qui se forment entre des « paquets d'ondes » distribués autour de fréquences données. L'article [6] s'inscrit dans ce cadre, proposant des ébauches de développements oscillants pour les équations de champs semi-linéaires avec invariance de jauge qui nous intéressent. La méthode consiste à se ramener, moyennant des

conditions de polarisation sur certains termes oscillants, au développement d'un système d'équations d'ondes semi-linéaires. En contre partie, le développement s'arrête au premier ordre. Rien ne laisse préjuger que l'on puisse pousser ce développement à tout ordre, et encore moins qu'il existe des solutions exactes qui viendraient prolonger (et du coup justifier) les solutions asymptotiques formelles ainsi obtenues. Enfin, les oscillations envisagées restent de faible amplitude, et ne permettent pas au système de révéler toute la richesse de sa structure algébrique.

Depuis, l'intérêt des méthodes d'optique géométrique pour l'étude de systèmes d'e.d.p. non linéaires issus de lois de conservation a été considérablement renforcé, et des progrès significatifs ont été faits dans la compréhension du comportement asymptotique de perturbations oscillantes de systèmes hyperboliques semi ou quasi-linéaires. Plus qu'un simple moyen de calcul, l'optique géométrique devient un outil efficace pour étudier la propagation ou les interactions d'ondes non linéaires, dans des problèmes où aucun résultat général n'est connu. Il faut cependant attendre 1992 pour voir apparaître les premières justifications rigoureuses de développements W.K.B. monophasés pour des systèmes hyperboliques d'ordre 1 en dimension quelconque dans l'article [13] de J.L. Joly et J. Rauch pour le cas semi-linéaire, ou dans ceux d' O. Guès [11, 10] pour le cas quasi-linéaire. L'article [12] de J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch précise et complète ces résultats. Les développements mis aux point par Y. Choquet-Bruhat ont donc été légitimés plus de vingt ans après la parution de [3].

La première raison d'être de cet article est que les systèmes d'équations de champs semi-linéaires avec invariance de jauge envisagés dans [6] (voir aussi [4]) échappent au cadre des études précédentes. Pour cause, ce ne sont pas de vrais systèmes hyperboliques, au sens des articles sus-cités, et ils apparaissent a priori « mal déterminés »... Il est toujours possible de les résoudre sous forme de systèmes d'équations semi-linéaires strictement hyperboliques, mais c'est au prix d'une condition complémentaire sur les inconnues (nous pensons, par exemple, à la jauge de Lorentz). Une façon (optimiste) d'aborder le problème consiste donc à se ramener à un système hyperbolique semi-linéaire sur-déterminé, et à le traiter comme si de rien n'était, en espérant que ses degrés de symétrie suffiront pour contourner la difficulté. Cette démarche a déjà fait ses preuves dans le cas de solutions régulières : il existe une relation algébrique sur les équations (héritée des identités de Bianchi sur le champ de jauge) garantissant que certaines « bonnes » contraintes de jauge « hyperbolisantes » se propagent automatiquement, dès lors qu'elles sont satisfaites à $t = 0$ ainsi que les contraintes elliptiques de compatibilité structurelle qui pèsent sur les données de Cauchy. Quoiqu'il en soit, il n'est pas acquis que ces principes tiennent encore pour des solutions fortement oscillantes à haute fréquence, et le développement W.K.B. de tels systèmes ne peut se faire directement dans l'esprit de [13] ou [11, 10] sans reconsidérer minutieusement la structure algébrique des équations. Enfin, combien même parviendrions nous à résoudre un problème de Cauchy oscillant en s'appuyant sur une contrainte de jauge

hyperbolisante, il faudrait s'assurer que les oscillations observées ne sont pas artificielles et ne peuvent pas être annulées par un changement de jauge oscillant de même amplitude. Il est nécessaire, à un moment ou un autre, de préciser géométriquement la façon dont se propagent les différentes composantes oscillantes du champ de jauge, en identifiant celles qui sont polarisées (partie sur-déterminée du système liée aux contraintes elliptiques sur les données initiales), libres (partie sous-déterminée du système liée à l'invariance de jauge) ou transportées le long de géodésiques nulles de l'espace-temps (partie dynamique du système se comportant de façon véritablement hyperbolique).

La seconde motivation de l'article provient des résultats d'existence de solutions peu régulières d'équations de champs à non-linéarités dites « compatibles » obtenus il-y-a quelques années par S. Klainerman et M. Machedon dans [14, 15], ou par M. Beals et M. Bézard dans [2] en combinant les effets régularisants d'estimations de type Strichartz avec la structure algébrique très particulière des termes non linéaires. Une question assez naturelle est de chercher des développements W.K.B. de solutions aussi peu régulières, et de les justifier convenablement. En fait, nous espérons utiliser l'optique géométrique pour obtenir des informations un peu plus précises sur la façon dont se comportent les solutions lorsque la régularité tombe sous le seuil critique pour lequel les termes non linéaires commencent à jouer un rôle actif. Dans ce but, nous avons cherché à construire les développements oscillants monophasés les plus singuliers possibles : si l'amplitude de ces développements est trop faible, la structure « compatible » des non-linéarités (J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch parlent de conditions de « transparence ») fait que les oscillations restent de simples perturbations linéaires d'une solution régulière donnée et ne forment aucune interaction substantielle. Si elle est trop forte, il se forme immédiatement des interactions destructives que nous ne pouvons pas maîtriser. Il faut donc trouver l'amplitude d'oscillation critique pour laquelle l'optique géométrique met en évidence de véritables effets non linéaires, tout en restant capables de prouver que les solutions oscillantes que nous construisons restent asymptotiques à des solutions exactes du système. Ce faisant, nous sommes confrontés à des difficultés nouvelles du point de vu de l'analyse et sommes obligés de démontrer des estimations bilinéaires plus fines que celles utilisées dans [11, 10].

Plan de l'article. — L'article est divisé en trois sections : la première est consacrée à l'exposition des résultats et à quelques rappels sur la structure des équations, la seconde à la construction de solutions approchées sous forme de développements oscillants monophasés d'amplitude maximale, et la dernière à l'obtention de solutions exactes prolongeant les solutions approchées.

Remerciements. — L'auteur tient particulièrement à remercier Guy Métivier et Patrick Gérard pour les entretiens fructueux qu'il a pu avoir avec eux lors la rédaction de cet article, ainsi que Nicolas Burq pour ses conseils et son dévouement quotidien.

Il convient également de mentionner l'aide et le soutien de Max Bézard, sans qui ce travail n'aurait pu voir le jour.

La Délégation Générale pour l'Armement a supporté financièrement l'auteur par une bourse de thèse et un accueil chaleureux au sein de l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA, nous en sommes profondément reconnaissants.