MÉMOIRES DE LA SMF 93

PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE DE CAUCHY HARISH-CHANDRA POUR CERTAINES PAIRES DUALES D'ALGÈBRES DE LIE

Florent Bernon

Société Mathématique de France 2003
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

F. Bernon
Laboratoire analyse, géométrie et applications, UMR CNRS 7539,
Département de mathématiques, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse, France.
E-mail : bernon@math.univ-paris13.fr
Mathematisches Institut, Georg-August Universität Göttingen, Bunsenstrasse 3-5,
D-37073 Göttingen, Allemagne.
E-mail : bernon@uni-math.gwdg.de

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 22E46.

***Mots clefs*. —** Groupe unitaire, intégrale orbitale, correspondance theta.

PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE DE CAUCHY HARISH-CHANDRA POUR CERTAINES PAIRES DUALES D'ALGÈBRES DE LIE

Florent Bernon

***Résumé.* —** On considère un groupe symplectique Sp et une paire duale réductive et irréductible (G, G') de Sp au sens de R. Howe. On désigne par $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$) les algèbres de Lie de G (resp. G'). T. Przebinda définit une application appelée intégrale de Cauchy Harish-Chandra et notée **Chc** qui associe à toute fonction de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ une fonction définie sur $\mathfrak{g}'^{\mathrm{reg}}$, l'ouvert des éléments semi-simples réguliers. Dans cet article, on montre que ces fonctions sont des intégrales invariantes si la paire est de type II et possèdent les propriétés locales des intégrales invariantes si la paire est formée de groupes unitaires de même rang. Les relations de saut sont alors obtenues à une constante multiplicative près.

***Abstract* (Properties of the Cauchy Harish-Chandra integral for some dual pairs of Lie algebras)**

We consider a symplectic group Sp and an irreductible dual pair (G, G') in Sp in the sense of R. Howe. Let $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$) be the Lie algebra of G (resp. G'). T. Przebinda has defined a map **Chc**, called the Cauchy Harish-Chandra integral from the space of smooth compactly supported functions of $\mathfrak{g}$ to the space of functions defined on the open set $\mathfrak{g}'^{\mathrm{reg}}$ of semisimple regular elements of $\mathfrak{g}'$. We prove that these functions are invariant integrals if G and G' are linear groups and behave locally like invariant integrals if G and G' are unitary groups of same rank. In this last case, we obtain the jump relations up to a multiplicative constant which only depends on the dual pair.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Soit W un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit symplectique $\langle\, ,\, \rangle$. On note $Sp(W)$ et $\mathfrak{sp}(W)$ le groupe et l'algèbre de Lie associés. Soit (G, G') une paire duale irréductible de $Sp(W)$ au sens de Howe [**4**]. Pour un sous-groupe de Cartan H' de G', on note T' (resp. A') sa partie compacte (resp. sa partie déployée) c'est à dire les éléments de H' qui ont leurs valeurs propres de module 1 (resp. réelles positives). Soient $A'' = Sp(W)^{A'}$ le centralisateur de A' dans $Sp(W)$ et A''' le centralisateur de A'' dans $Sp(W)$. Il existe un ouvert dense de W que l'on note $W_{A'''}$ tel que $A'''\backslash W_{A'''}$ soit une variété d'après [**6**, p. 302]. On considère une mesure $d\dot{w}$ sur $A'''\backslash W_{A'''}$. Pour un sous-espace u de $\mathfrak{sp}(W)$, on considère l'application moment $\tau_u : W \to u^*$ (le dual de u) telle que $\tau_u(w)(x) = \langle xw, w\rangle$ pour $x \in u$ et $w \in W$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\chi(x) = e^{2i\pi x}$ et pour $w \in W$

$$\chi_x(w) = \chi(\tfrac{1}{4}\tau_{\mathfrak{sp}(W)}(w)(x)).$$

On désigne par $\mathfrak{a}''$ l'algèbre de Lie de A''. Pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathfrak{a}'')$ (l'espace des fonctions lisses à support compact), Przebinda ([**6**]) montre que

$$\int_{A'''\backslash W_{A'''}} \left| \int_{\mathfrak{a}''} \psi(x)\chi_x(w)dx \right| d\dot{w} < \infty.$$

On considère la distribution sur $\mathfrak{a}''$

$$Chc(\psi) = \int_{A'''\backslash W_{A'''}} \int_{\mathfrak{a}''} \psi(x)\chi_x(w)dxd\dot{w}.$$

Pour $x' \in \mathfrak{h}'$ semi-simple régulier, l'injection $i_{x'} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}''$, $x \mapsto x + x'$, est transverse au front d'onde $WF(Chc)$ de Chc.

Cela permet de définir l'image réciproque de Chc par l'injection $i_{x'}$ que l'on note $Chc_{x'}$. Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, on note $\mathbf{Chc}(\phi)$ la fonction définie sur $\mathfrak{g}'^{\mathrm{reg}}$ par

$$\mathbf{Chc}(\phi)(x') = Chc_{x'}(\phi).$$

Dans le cas où (G, G') est une paire dite « stable range », pour toute orbite nilpotente $\mathcal{O}'$ de $\mathfrak{g}'^*$, il existe une unique orbite nilpotente $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{g}^*$ dense dans $\tau_{\mathfrak{g}} \circ {\tau_{\mathfrak{g}'}}^{-1}(\mathcal{O}')$. On note $\mu(\mathcal{O})$ et $\mu(\mathcal{O}')$ les mesures positives sur $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ respectivement G et G'-invariantes. D'après le théorème 1.19 de [**6**] à une constante multiplicative près, on a

$$\widehat{\mu}_{\mathcal{O}}(\phi) = \sum \frac{1}{|W(H')|} \int_{\mathfrak{h}'} \widehat{\mu}_{\mathcal{O}'}(x') D_{\mathfrak{g}'}(x')^2 \, \mathbf{Chc}(\phi)(x') dx'$$

pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ où la somme s'effectue sur un système de représentants de sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $D_{\mathfrak{g}'}(x') = \left|\det(ad(x')_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{h}'}\right|^{1/2}$ pour $x' \in \mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}$. Cette égalité suggère que $\mathbf{Chc}(\phi)$ a les propriétés locales d'une intégrale orbitale.

L'objet de cet article est de montrer que pour les paires duales irréductibles de type I formées de groupes unitaires de même rang, la fonction $\mathbf{Chc}(\phi)$ ($\phi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$) qui est définie sur $\mathfrak{g}'^{\mathrm{reg}}$ possède les propriétés locales des intégrales orbitales de $\mathfrak{g}'$. Plus précisément, on montre que la fonction $\mathbf{Chc}(\phi)$ est lisse sur $\mathfrak{g}'^{\mathrm{reg}}$ et G'-invariante. On exhibe une famille de sous-algèbres de Cartan $(\mathfrak{h}_N)_{N \in \Omega'}$ de $\mathfrak{g}'$ indexée sur un ensemble Ω' qui représente l'ensemble des systèmes de racines admissibles d'un système de racines positives d'une sous-algèbre de Cartan compacte de $\mathfrak{g}'$. Pour chaque $N \in \Omega'$, on construit une fonction $\mathbf{Chc}(\phi)_N$ sur $\mathfrak{h}_N'^{\mathrm{reg}}$.

Puis, on montre que toutes les dérivées de $\mathbf{Chc}(\phi)_N$ sont localement bornées et se prolongent par continuité sur l'adhérence des composantes connexes de l'ensemble des éléments de $\mathfrak{h}'_N$ qui ne s'annulent pour aucune racine imaginaire non compacte de $\mathfrak{h}'_N$. Pour une racine α imaginaire non compacte, on note $\langle \partial(w) \, \mathbf{Chc}(\phi)_N \rangle$ la fonction saut qui est définie d'après ce qui précède. On montre enfin que pour deux sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}'_N$ et $\mathfrak{h}'_M$ (avec $N, M \in \Omega'$) successives dans l'ordre de Hiraï, il existe une constante C telle que pour tout élément w de l'algèbre symétrique de $\mathfrak{h}'_N$, on a

$$\langle \partial(w) \, \mathbf{Chc}(\phi)_N \rangle = \mathrm{i} C \partial(w') \, \mathbf{Chc}(\phi)_M$$

où w' est l'image de w par une transformée de Cayley.

Le plan de cet article est le suivant :

Dans le chapitre 1, en utilisant une expression obtenue par T. Przebinda dans [**6**] de **Chc** pour les paires de type II, on montre qu'il existe une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}')$ telle que $\mathbf{Chc}(\phi)$ représente l'intégrale orbitale de ψ, Théorème 1.2.2.

Dans le chapitre 2, on introduit les notations nécessaires à la définition de **Chc** pour les paires de groupes unitaires et on précise les expressions de $\mathbf{Chc}(\phi)$ obtenues par T. Przebinda dans [**6**] pour une sous-algèbre de Cartan compacte de $\mathfrak{g}'$, Théorème 2.2.4 puis pour une sous-algèbre de Cartan quelconque de $\mathfrak{g}'$, Théorème 2.2.7. Cette dernière expression est définie modulo une constante qui détermine C.

Dans le chapitre 3, on considère les paires $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ avec $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ de rang 2. Après avoir rappelé les propriétés des intégrales invariantes de Harish-Chandra sur $\mathfrak{u}(2)$ et $\mathfrak{u}(1,1)$, on obtient les propriétés de **Chc** aisément si $\mathfrak{g}$ est compacte (i.e. $\mathfrak{u}(2)$) dans la section 1. Dans la section 2, on étudie le développement asymptotique de certaines fonctions qui permettent dans la section 3 d'obtenir les propriétés locales de **Chc** si $\mathfrak{g}$ est non compacte (i.e. $\mathfrak{u}(1,1)$). Dans la section 4, on rassemble les résultats obtenus pour $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ avec $rang(\mathfrak{g}) = rang(\mathfrak{g}') = 2$, Théorème 3.5.1.

Les formules obtenues par T. Przebinda rappelées dans le chapitre 2 montrent que $\mathbf{Chc}(\phi)$ ne dépend que de l'intégrale orbitale de ϕ. Pour généraliser aux paires de rang quelconque, on montre dans la section 3 du chapitre 4 que les intégrales orbitales de $\mathfrak{g}$ (avec $rang(\mathfrak{g}) \geqslant 2$) peuvent être approchées par des sommes de produits d'intégrales orbitales de sous-groupes réductifs de G de rang $\leqslant 2$, Théorèmes 4.3.11 et 4.4.4. Ces propriétés permettent d'utiliser les résultats du chapitre 3 pour généraliser aux paires $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ de rang supérieur. Le principe de cette réduction est le suivant : Désignons l'espace des intégrales orbitales de $\mathfrak{g}$ par $\mathcal{E}$, alors on construit un espace topologique $\widetilde{\mathcal{E}}$ contenant $\mathcal{E}$ tel que **Chc** se prolonge naturellement à $\widetilde{\mathcal{E}}$. Les résultats de décomposition mentionnés précédemment exhibent une partie $\mathcal{E}'$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ telle que tout élément de $\mathcal{E}$ est dans l'adhérence de $\mathcal{E}'$. Dans le chapitre suivant, on utilise le fait que le **Chc** d'un élément de $\mathcal{E}'$ s'exprime simplement à partir du **Chc** pour des paires de rang $\leqslant 2$.

Dans le chapitre 5, dans un premier temps, on étudie les propriétés de $\mathbf{Chc}(\phi)$ sur la sous-algèbre de Cartan compacte $\mathfrak{h}'_{\varnothing}$. On montre que toutes les dérivées de $\mathbf{Chc}(\phi)_{\varnothing}$ se prolongent par continuité sur l'adhérence des composantes connexes de $\mathfrak{h}'^{\mathrm{reg}}_{\varnothing}$, Théorème 5.1.25 puis on calcule le saut de cette fonction par rapport aux hyperplans associés aux racines (imaginaires) de $\mathfrak{h}'_{\varnothing}$. La fonction saut obtenue est reliée au **Chc** pour une paires $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}'_1)$ telle que $rang(\mathfrak{g}_1) = rang(\mathfrak{g}'_1) = rang(\mathfrak{g}) - 2$, Théorème 5.1.30. Dans la deuxième section, on obtient les propriétés locales de $\mathbf{Chc}(\phi)$ pour une sous-algèbre de Cartan quelconque de $\mathfrak{g}'$, Théorème 5.2.4 et on calcule le 'saut' de cette fonction, Théorème 5.2.5.

Ce travail a fait l'objet d'une note [**1**].

Remerciements. — Je tiens à remercier le Professeur A. Bouaziz pour de très utiles conversations pendant l'élaboration de ce travail. Je remercie également le Professeur T. Przebinda pour son aide.