MÉMOIRES DE LA SMF 96

UNE CONJECTURE DE LUSZTIG POUR LES GROUPES CLASSIQUES

Jean-Loup Waldspurger

Société Mathématique de France 2004
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J.-L. Waldspurger
CNRS, Institut mathématique de Jussieu, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris.
E-mail : waldspur@math.jussieu.fr

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 11E57, 20C33.

***Mots clefs*. —** Groupes classiques, représentations, faisceaux-caractères, symboles, conjecture de Lusztig.

UNE CONJECTURE DE LUSZTIG POUR LES GROUPES CLASSIQUES

Jean-Loup Waldspurger

***Résumé.* —** Pour un groupe classique défini sur un corps fini de caractéristique assez grande, on prouve une conjecture de Lusztig reliant les caractères des représentations irréductibles aux fonctions traces des faisceaux-caractères. La preuve inclut une normalisation précise de ces dernières fonctions. Cela généralise des résultats de Shoji à tous les groupes classiques, en particulier au groupe orthogonal pair qui n'est ni connexe, ni à centre connexe.

***Abstract* (A conjecture of Lusztig for classical groups). —** For a classical group defined over a finite field of sufficiently large characteristic, we prove a conjecture of Lusztig connecting characters of irreducible representations with characteristic functions of character-sheaves. Those functions are precisely normalized in the proof. Our result generalizes Shoji's results to all classical groups. We consider in particular the even orthogonal group, that is neither connected nor with connected center.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1

1. Notations 7

2. Symboles 15

3. Faisceaux-caractères 21

4. Représentations quadratiques-unipotentes 35

5. Les théorèmes 47

6. Détermination des faisceaux-caractères quadratiques-unipotents ... 49

7. Valeurs des fonctions traces de faisceaux-caractères 57

8. Formules d'induction 81

9. Paramétrage de Lusztig 87

10. Quelques calculs de traces 101

11. Commutation à l'induction de Deligne-Lusztig 115

12. Fin de la preuve 137

13. Le cas du groupe symplectique 147

Bibliographie 165

INTRODUCTION

Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe réductif connexe défini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, notons $G = \boldsymbol{G}(\mathbb{F}_q)$ son groupe de points sur $\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{C}(G)$ l'espace des fonctions sur G, à valeurs complexes, invariantes par conjugaison. Cet espace a pour base l'ensemble des caractères des représentations irréductibles de G. Lusztig a introduit en [**L6**] une autre base, formée des fonctions traces associées aux faisceaux-caractères sur $\boldsymbol{G}$ invariants par le Frobenius. Il a conjecturé la forme de la matrice de transition entre ces deux bases. Cette conjecture a été prouvée par Shoji, en [**S1**], dans le cas où le centre de $\boldsymbol{G}$ est connexe. Une autre démonstration a été esquissée par Lusztig dans [**L10**]. Il faut préciser qu'un problème de normalisation se pose pour ces fonctions traces associées aux faisceaux-caractères. Elles ne sont bien définies qu'à un scalaire près. Le résultat de Shoji, comme la conjecture de Lusztig elle-même, consiste à dire que l'on peut normaliser ces fonctions de sorte que la matrice évoquée ci-dessus ait la forme prédite. Mais la normalisation n'est pas précisée en général. Elle l'a été ultérieurement par Shoji, en [**S2**], dans le cas des représentations unipotentes des groupes classiques déployés à centre connexe.

Dans le présent article, nous considérons le cas des groupes classiques $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{Sp}(2n)$, $\boldsymbol{SO}(2n+1)$ et $\boldsymbol{O}(2n)$. Ce dernier n'est pas connexe, mais il n'est pas difficile de généraliser dans son cas les différentes constructions utiles, en particulier celles des faisceaux-caractères. D'un point de vue combinatoire, le groupe $\boldsymbol{O}(2n)$ est d'ailleurs plus simple que son sous-groupe $\boldsymbol{SO}(2n)$. Signalons que le cas des groupes non connexes a été abordé par différents auteurs, *cf.* [**DM2**], [**E**].

Nous nous limitons à un sous-espace $\mathbb{C}[\mathrm{Quad}(G)]$ de $\mathcal{C}(G)$. Expliquons sa définition. D'après Lusztig, on sait associer à toute représentation irréductible de G une classe de conjugaison semi-simple dans le groupe dual. On dira qu'une représentation irréductible est quadratique-unipotente (cette terminologie s'inspire de [**M**]) si les éléments de cette classe de conjugaison ont pour carré l'identité. C'est équivalent à dire que leurs valeurs propres dans la représentation naturelle du groupe dual sont ± 1, ou encore que le commutant d'un de ces éléments n'est pas inclus dans un groupe de Lévi propre du groupe dual (on appelle groupe de Lévi un sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique). On note $\mathrm{Quad}(G)$ l'ensemble des représentations irréductibles quadratiques-unipotentes de G et $\mathbb{C}[\mathrm{Quad}(G)]$ le sous-espace de $\mathcal{C}(G)$ engendré par leurs caractères. On peut caractériser les faisceaux-caractères dont les fonctions traces appartiennent à cet espace. Un faisceau-caractère apparaît toujours comme composante d'un complexe « induit » à partir d'un système local cuspidal $\mathcal{L}$ porté par une sous-variété d'un groupe de Lévi $\boldsymbol{M}$ de $\boldsymbol{G}$. Notons $\boldsymbol{Z}^0_{\boldsymbol{M}}$ la composante neutre du centre de $\boldsymbol{M}$. Il existe un système local $\mathcal{L}_Z$ sur $\boldsymbol{Z}^0_{\boldsymbol{M}}$ qui joue le rôle de « caractère central » de $\mathcal{L}$. La trace du faisceau-caractère appartient à $\mathbb{C}[\mathrm{Quad}(G)]$ si et seulement si $\mathcal{L}_Z^{\otimes 2}$ est trivial. Se limiter à $\mathbb{C}[\mathrm{Quad}(G)]$ n'est pas une restriction essentielle car l'espace $\mathcal{C}(G)$ tout entier se reconstruit à l'aide d'espaces $R^G_M\mathbb{C}[\mathrm{Quad}(M)\otimes\tau]$ où $\boldsymbol{M}$ est un groupe de Lévi de $\boldsymbol{G}$, τ est un caractère de degré 1 de M et R^G_M est le foncteur d'induction de Deligne-Lusztig.

Nous imposons une hypothèse plus sérieusement restrictive, à savoir $q > 2n$ (et q impair). Cela est nécessaire pour utiliser les résultats de [**L8**] comparant les foncteurs d'induction de Deligne-Lusztig à l'induction des faisceaux-caractères.

Sous cette hypothèse, on donne dans cet article :

– une classification des représentations irréductibles quadratiques-unipotentes de G (le travail est presque entièrement fait en [**L2**]) ;

– une construction et une classification des fonctions-traces de faisceaux-caractères qui appartiennent à $\mathbb{C}[\mathrm{Quad}(G)]$. Ces fonctions sont précisément normalisées ;

– une preuve de la conjecture de Lusztig dans ce cadre, qui exprime la matrice de transition entre les deux bases ci-dessus de $\mathbb{C}[\mathrm{Quad}(G)]$.

Les constructions sont effectuées dans les paragraphes 3 et 4. Le théorème principal est énoncé au paragraphe 5. Nous n'en donnons une démonstration complète que dans le cas du groupe $\boldsymbol{O}(2n)$ (paragraphes 6 à 12). Nous passons sous silence le cas du groupe $\boldsymbol{SO}(2n+1)$. Parce qu'il est connexe et adjoint, son cas relève beaucoup plus simplement des travaux de Lusztig et Shoji. Nous indiquons brièvement au paragraphe 13 les modifications à apporter à la preuve dans le cas du groupe $\boldsymbol{Sp}(2n)$.

Expliquons la structure de la démonstration dans le cas du groupe orthogonal pair. Il est commode de regrouper les deux formes de ce groupe, la forme déployée $\boldsymbol{O}_+(2n)$ et la forme non déployée $\boldsymbol{O}_-(2n)$. On étudie donc l'espace $\mathbb{C}[\mathrm{Quad}(O(2n))] = \mathbb{C}[\mathrm{Quad}(O_+(2n))] \oplus \mathbb{C}[\mathrm{Quad}(O_-(2n))]$. Pour un entier $m \geqslant 0$, Lusztig a introduit en [**L2**] l'ensemble $\mathcal{S}_{m,\mathrm{pair}}$ des symboles de rang m et de défaut pair. Un tel symbole est une classe d'équivalence, pour une relation convenable, de paires (Λ^+, Λ^-) de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$, où l'on ne tient pas compte de l'ordre, c'est-à-dire que

$(\Lambda^+,\Lambda^-)\equiv(\Lambda^-,\Lambda^+)$. On note $\widetilde{\mathcal{S}}_{m,\mathrm{pair}}$ l'ensemble des symboles ordonnés de rang m et de défaut pair : la définition est la même, sauf que l'on tient compte de l'ordre, c'est-à-dire que l'on n'identifie pas (Λ^+,Λ^-) à (Λ^-,Λ^+). On note $\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\mathrm{pair}}$ est la réunion des $\widetilde{\mathcal{S}}_{n_1,\mathrm{pair}}\times\widetilde{\mathcal{S}}_{n_2,\mathrm{pair}}$ où n_1,n_2 parcourent les entiers $\geqslant 0$ tels que $n=n_1+n_2$. On note $\mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\mathrm{pair}}]$ l'espace vectoriel complexe de base $\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\mathrm{pair}}$. On le munit du produit hermitien pour lequel cette base est orthonormée. À la suite de Lusztig, on définit une isométrie involutive $\mathcal{F}$ de cet espace. Lusztig l'appelle transformation de Fourier.

On construit explicitement une base de $\mathbb{C}[\mathrm{Quad}(O(2n))]$ formée de fonctions traces de faisceaux-caractères, qui est naturellement paramétrée par $\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\mathrm{pair}}$. Cela détermine une isométrie $k_n:\mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\mathrm{pair}}]\to\mathbb{C}[\mathrm{Quad}(O(2n))]$. On classifie ensuite les représentations irréductibles quadratiques-unipotentes de $O_+(2n)$ et $O_-(2n)$. La méthode consiste à classifier d'abord les cuspidales, grâce à [**L2**], puis à décomposer les représentations induites de cuspidales (cette méthode remonte à Harish-Chandra). Il s'avère que l'ensemble des représentations irréductibles quadratiques unipotentes est aussi paramétré par $\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\mathrm{pair}}$. Cela détermine une autre isométrie $\pi_n:\mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\mathrm{pair}}]\to\mathbb{C}[\mathrm{Quad}(O(2n))]$. Posons $i_n=\pi_n^{-1}\circ k_n\circ\mathcal{F}$. Le théorème est que i_n est l'identité.

La première étape est de prouver que i_n est l'identité sur un gros sous-espace de $\mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\mathrm{pair}}]$. Soit m un entier $<n$. On définit des homomorphismes d'induction $R:\mathbb{C}[\mathrm{Quad}(O(2m))]\to\mathbb{C}[\mathrm{Quad}(O(2n))]$ de la façon suivante. Soient η, ε deux signes $\pm$; soit $\boldsymbol{T}$ un tore tel que $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{O}_\eta(2m)$ soit un groupe de Lévi défini sur $\mathbb{F}_q$ de $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{O}_{\eta\varepsilon}(2n)$; soit χ un caractère quadratique-unipotent de T. On dispose du foncteur d'induction de Deligne-Lusztig R_M^G. Pour $f\in\mathbb{C}[\mathrm{Quad}(O_\eta(2m))]$, on pose $R(f)=R_M^G(\chi\times f)$. Comme on le voit, on dispose de plusieurs choix possibles pour $\boldsymbol{T}$ et χ, d'où plusieurs homomorphismes R. Fixons-en un. Notons R^k, R^π les applications linéaires qui rendent les diagrammes suivants commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{m,\mathrm{pair}}] & \xrightarrow{R^k} & \mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\mathrm{pair}}]\\ {\scriptstyle k_m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k_n}\\ \mathbb{C}[\mathrm{Quad}(O(2m))] & \xrightarrow{R} & \mathbb{C}[\mathrm{Quad}(O(2n))]\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}\mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{m,\mathrm{pair}}] & \xrightarrow{R^\pi} & \mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\mathrm{pair}}]\\ {\scriptstyle \pi_m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_n}\\ \mathbb{C}[\mathrm{Quad}(O(2m))] & \xrightarrow{R} & \mathbb{C}[\mathrm{Quad}(O(2n))].\end{array}$$

Lusztig a montré dans [**L8**] comment se comportaient les faisceaux-caractères pour l'induction de Deligne-Lusztig. On en déduit le calcul de R^k.

Si, dans la construction ci-dessus, $\boldsymbol{M}$ est un sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique défini sur $\mathbb{F}_q$, il est facile de calculer R^π. On voit alors que $\mathcal{F}\circ R^\pi=R^k\circ\mathcal{F}$ (le premier $\mathcal{F}$ agissant dans $\mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\mathrm{pair}}]$, le second dans $\mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{m,\mathrm{pair}}]$). En supposant par récurrence que i_m est l'identité, on en déduit que i_n est l'identité sur l'image de R^π.

Si $\boldsymbol{M}$ n'est plus un sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique défini sur $\mathbb{F}_q$, le calcul de R^π devient difficile. Il est essentiellement dû à Asai. Soit $(\Lambda_1,\Lambda_2)\in\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{m,\mathrm{pair}}$. On connaît trois propriétés de $R^\pi(\Lambda_1,\Lambda_2)$:

– notons $\pi = \pi_m(\Lambda_1, \Lambda_2)$ la représentation irréductible associée à (Λ_1, Λ_2). On sait que $R_M^G(trace\,\pi)$ est la trace d'une représentation virtuelle de G, c'est-à-dire une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs de traces de représentations irréductibles. Donc, avec une notation évidente, $R^\pi(\Lambda_1, \Lambda_2) \in \mathbb{Z}[\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\text{pair}}]$;

– soit $(\Lambda'_1, \Lambda'_2) \in \widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\text{pair}}$ un couple de symboles de défaut 0. On sait calculer le produit scalaire $(R^\pi(\Lambda_1, \Lambda_2), \mathcal{F}(\Lambda'_1, \Lambda'_2))$. Cela résulte de l'égalité $i_n \circ \mathcal{F}(\Lambda'_1, \Lambda'_2) = \mathcal{F}(\Lambda'_1, \Lambda'_2)$. Celle-ci résulte elle-même de la comparaison entre notre paramétrage « à la Harish-Chandra » des représentations irréductibles et le paramétrage de Lusztig. Ce dernier classifie les représentations par le produit scalaire de leur trace contre les fonctions $k_n(\Lambda'_1, \Lambda'_2)$, pour (Λ'_1, Λ'_2) comme ci-dessus ;

– si $R' : \mathbb{C}[\text{Quad}(O(2m'))] \to \mathbb{C}[\text{Quad}(O(2n))]$ est un homomorphisme analogue à R, si $(\Lambda'_1, \Lambda'_2) \in \widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{m',\text{pair}}$, on peut calculer le produit scalaire $(R^\pi(\Lambda_1, \Lambda_2), R'^\pi(\Lambda'_1, \Lambda'_2))$. En particulier, on connaît la norme de $R^\pi(\Lambda_1, \Lambda_2)$.

À l'aide de ces trois propriétés, un peu de combinatoire permet de déterminer $R^\pi(\Lambda_1, \Lambda_2)$ (en fait, pas complètement, *cf.* ci-dessous). De nouveau, on constate que $\mathcal{F} \circ R^\pi = R^k \circ \mathcal{F}$. Alors i_n est l'identité sur l'image de R^π.

On note $\mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\text{pair}}]_{IJ}$ le sous-espace de $\mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\text{pair}}]$ engendré par les images des homomorphismes R^π pour tous les R possibles. À ce point, on a démontré que i_n était l'identité sur ce sous-espace. Puisque i_n est une isométrie, elle se restreint en une isométrie de l'orthogonal de ce sous-espace. Cet orthogonal a pour base la famille des $\mathcal{F}(\Lambda_1, \Lambda_2)$, quand (Λ_1, Λ_2) décrit le sous-ensemble H des éléments « cuspidaux » de $\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\text{pair}}$. On introduit la matrice carrée C d'ordre $|H| \times |H|$ telle que $C_{\Lambda_1,\Lambda_2;\Lambda'_1,\Lambda'_2} = (i_n\mathcal{F}(\Lambda_1, \Lambda_2), \mathcal{F}(\Lambda'_1, \Lambda'_2))$ pour (Λ_1, Λ_2), $(\Lambda'_1, \Lambda'_2) \in H$. Pour achever de prouver le théorème, on doit montrer que C est l'identité. Remarquons que $C_{\Lambda_1,\Lambda_2;\Lambda'_1,\Lambda'_2} = (k_n(\Lambda_1, \Lambda_2), \pi_n \circ \mathcal{F}(\Lambda'_1, \Lambda'_2))$. De cette égalité, on déduit sans peine que $C_{\Lambda_1,\Lambda_2;\Lambda'_1,\Lambda'_2}$ est rationnel et même dans $2^{-N}\mathbb{Z}$ pour un entier N assez grand. Soit $(\Lambda_1, \Lambda_2) \in \widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\text{pair}}$. Le terme $\pi_n(\Lambda_1, \Lambda_2) - k_n \circ \mathcal{F}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ se calcule en fonction des coefficients de la matrice C. En effet, on écrit $(\Lambda_1, \Lambda_2) = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(\Lambda_1, \Lambda_2)$; on décompose $\mathcal{F}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ en $Z + Z'$ où $Z \in \mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{S}}_{n,\text{pair}}]_{IJ}$ et Z' appartient à l'orthogonal de ce sous-espace ; on sait que $i_n \circ \mathcal{F}(Z) = \mathcal{F}(Z)$; donc

$$\pi_n(\Lambda_1, \Lambda_2) - k_n \circ \mathcal{F}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \pi_n \circ \mathcal{F}(Z') - k_n(Z')$$

et ce dernier terme s'exprime à l'aide de la matrice C par définition de cette matrice. Supposons la conjecture à démontrer vraie. Alors $k_n \circ \mathcal{F}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \pi_n(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Ce terme est la trace d'une représentation irréductible, en particulier il est à valeurs entières. On peut effectivement montrer que $k_n \circ \mathcal{F}(\Lambda_1, \Lambda_2)$, calculé en certains points particuliers, a pour valeur, sinon un entier, du moins un rationnel dont on peut minorer la valuation 2-adique. C'est l'idée de Shoji, que l'on reprend en y insérant quelques résultats combinatoires de [**W**]. Il est curieux de constater à ce propos la similitude entre les problèmes combinatoires qui se posent ici et ceux qui se posaient en [**W**] concernant l'endoscopie pour les groupes p-adiques. Traduite en termes des coefficients