MÉMOIRES DE LA SMF 97

**INTÉGRALES ORBITALES
UNIPOTENTES STABLES ET
LEURS TRANSFORMÉES DE SATAKE**

Gia-Vuong Nguyen-Chu

Société Mathématique de France 2004
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

G.-V. Nguyen-Chu

Max-Planck Institute of Mathematics, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany.

E-mail : `ncgvuong@mpim-bonn.mpg.de`

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E35, 22E50.

Mots clefs. — Analyse harmonique, Groupes réductifs p -adiques, Algèbres de Hecke, Transformation de Satake, Intégrales orbitales unipotentes, Stabilité, Représentations, Traces, Endoscopie tordue.

INTÉGRALES ORBITALES UNIPOTENTES STABLES ET LEURS TRANSFORMÉES DE SATAKE

Gia-Vuong Nguyen-Chu

Résumé. — Dans cet article, nous abordons quelques questions d'analyse harmonique sur les groupes réductifs p -adiques. Plus précisément, nous nous intéressons à la transformation de Satake des distributions unipotentes stables dans le cas des groupes déployés. Ce problème est motivé, d'une part par les travaux de M. Assem sur le calcul des intégrales orbitales unipotentes, et d'autre part par ceux de J.-L. Waldspurger sur la détermination de l'espace des distributions unipotentes stables. Cette question est facile pour les groupes linéaires mais inconnue en général. Dans ce travail, nous traitons le cas des groupes $\mathbf{Sp}(2n)$. Pour $n = 2$, nous démontrons que ces transformées de Satake s'expriment comme des fonctions régulières sur le tore réel unitaire de dimension 2. Nous montrons ensuite que ces fonctions peuvent également être retrouvées par la transformation de Satake des distributions de toute autre nature : les traces tordues compactes d'une famille explicite de représentations de $\mathbf{GL}(5)$. Ce phénomène peut s'expliquer par l'endoscopie tordue entre $\mathbf{Sp}(2n)$ et $\mathbf{GL}(2n + 1)$ comme l'a remarqué Arthur. Pour $n > 2$, on démontre dans un certain nombre de cas que les transformées de Satake de telles traces sont effectivement des fonctions régulières, d'une forme commune, sur le tore réel unitaire de rang n . On l'a en particulier vérifié pour $n \leq 4$. On s'attend à ce que ceci reste vrai pour n quelconque. Grâce à ces calculs, on propose alors une conjecture assez précise qui décrit les transformées de Satake des distributions unipotentes stables sur $\mathbf{Sp}(2n)$.

Abstract (Stable unipotent orbital integrals and their Satake transforms)

In this article, we are concerned with some questions arising from harmonic analysis on p -adic groups. More precisely, we are interested in Satake transforms of stable unipotent distributions in the case of split groups. This problem is motivated, on one hand, by M. Assem's work on the computation of unipotent orbital integrals, and on the other hand, by J.-L. Waldspurger's on the determination of the space of stable unipotent distributions. This question is easy for general linear groups but unknown in general. In this work, we deal with the groups $\mathbf{Sp}(2n)$. For $n = 2$, we show that these Satake transforms are regular functions over the rank-2 unitary real torus. We then show that these functions can be recovered by the Satake transform of some distributions of a totally different kind: the twisted compact traces of an explicit family of representations of $\mathbf{GL}(5)$. This phenomenon may be explained by twisted endoscopy between $\mathbf{Sp}(2n)$ and $\mathbf{GL}(2n + 1)$ as remarked by Arthur. For $n > 2$, we show, in some cases, that the Satake transforms of these traces are actually regular functions, of a common form, over the rank- n unitary real torus. In particular, we have verified it when $n \leq 4$. We expect that it is true in general. Thanks to these computations, we then propose a quite precise conjecture, that describes the Satake transforms of stable unipotent distributions on $\mathbf{Sp}(2n)$.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Le problème de départ	1
Approche par les traces compactes	3
Transfert vers le groupe linéaire	4
Comparaison entre $\mathbf{H}$ et $\mathbf{G}$	5
Trop de représentations	5
Organisation de cet article	6
1. Une formule pour les traces tordues compactes	9
1.1. Définitions	9
1.2. Une formule d'intégration	10
1.3. Formule de Clozel	14
2. Les traces tordues compactes sur $GL(2n + 1)$	17
2.1. Les représentations considérées	17
2.2. Filtration de Bernstein-Zelevinsky	19
2.3. Normalisation des opérateurs d'entrelacement	20
2.4. Premier exemple de calculs, cas où π est symétrique	26
3. Le cas $GL(5)$	29
3.1. Calculs explicites dans les cas symétriques	29
3.2. Cas 5 : $\pi = \text{St}_1 \times \xi \text{St}_3 \times \xi \text{St}_1$	33
3.3. Transformation de Satake des traces tordues compactes	39
4. Intégrales orbitales unipotentes stables sur $\mathbf{Sp}(4)$	43
4.1. Formule de Rao	43
4.2. Distributions stablement invariantes à support unipotent	44
4.3. Formule de Macdonald	45
4.4. Transformation de Satake	46
4.5. Comparaison entre $\mathbf{GL}(5)$ et $\mathbf{Sp}(4)$	51

5. Le cas général, réduction au cas où $\beta = \emptyset$	53
5.1. Le théorème de réduction	53
5.2. Démonstration du théorème 5.3	55
6. Le cas $\pi = \text{St}_{2n+1}$	63
7. Le cas $\pi = \text{St}_{2h+1} \times \xi \text{St}_{2k+1} \times \xi \text{St}_1$	65
7.1. Le module de Jacquet π_U , où $\mathbf{B} = \mathbf{TU}$	65
7.2. Les modules de Jacquet π_N où $\mathbf{P} = \mathbf{MN} \in \mathcal{P}^{\theta-st}$	70
7.3. Calculs explicites de $\text{tr}_{\theta-c} \pi$	73
7.4. Transformation de Satake de $\text{tr}_{\theta-c} \pi$	78
8. Le cas $\pi = \text{St}_1 \times \xi \text{St}_{2h+1} \times \xi \text{St}_{2k+1}$	83
8.1. Le module de Jacquet π_U , où $\mathbf{B} = \mathbf{TU}$	83
8.2. Les modules de Jacquet π_N où $\mathbf{P} = \mathbf{MN} \in \mathcal{P}^\theta$	89
8.3. Transformation de Satake de $\text{tr}_{\theta-c} \pi$	93
9. Le cas $\pi = \text{St}_{2h+1} \times \text{St}_{2k+1} \times \text{St}_1$	97
9.1. Le module de Jacquet π_U	97
9.2. Les modules de Jacquet π_N , où $\mathbf{P} = \mathbf{MN} \in \mathcal{P}^\theta$	99
9.3. Formule pour $\text{tr}_{\theta-c} \pi$	101
9.4. Transformation de Satake de $\text{tr}_{\theta-c} \pi$	102
10. En guise de conclusion	103
10.1. Description de $\mathcal{D}_{\text{unip} \mathcal{H}(H)}^{\text{st}}$	103
10.2. Analogie avec les traces tordues compactes	104
10.3. Comparaison entre $\mathbf{Sp}(2n)$ et $\mathbf{GL}(2n+1, F)$	105
Bibliographie	109

INTRODUCTION

Le problème de départ

Soit $\mathbf{H}$ un groupe réductif, connexe, déployé sur un corps local non archimédien F de caractéristique zéro et de corps résiduel $\mathbb{F}_q$. Notons $H = \mathbf{H}(F)$, et fixons un sous-groupe compact maximal hyperspécial K . Soit $\mathcal{H}(H)$ l'algèbre de Hecke sphérique correspondante. Soient D_{unip} , D^{st} , $D_{\text{unip}}^{\text{st}}$ les espaces des distributions invariantes sur H à support unipotent, stables et stables à support unipotent respectivement. Le troisième espace est l'intersection des deux premiers. L'algèbre $\mathcal{H}(H)$ est isomorphe via l'isomorphisme de Satake à une algèbre de polynômes notée $\check{\mathcal{H}}(H)$, alors que l'espace D_{unip} admet une base paramétrée par les orbites unipotentes de G dont on connaît dans de nombreux cas le paramétrage combinatoire. Ces deux objets sont donc essentiellement de nature combinatoire. L'idée à l'origine de cet article est de comprendre la restriction de D_{unip} à $\mathcal{H}(H)$. Cependant, on peut se contenter dans un premier temps de se restreindre au sous-espace $D_{\text{unip}}^{\text{st}}$. On espère ensuite pouvoir étendre les résultats à l'espace D_{unip} via l'*induction endoscopique*. D'autre part, la description de $D_{\text{unip}}^{\text{st}}$ a été donnée par Waldspurger dans [Wa2], sous l'hypothèse que $\mathbf{H}$ est un groupe classique non ramifié, et la caractéristique résiduelle de F est assez grande, ce que nous supposons par la suite. Il s'agit essentiellement de calculs explicites.

Considérons l'exemple où $\mathbf{H}$ est le groupe linéaire $\mathbf{GL}(n)$. L'algèbre $\check{\mathcal{H}}(H)$ est alors l'algèbre des polynômes en n variables $X_1, \dots, X_n$ ainsi que leurs inverses, qui sont invariants par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. L'action du groupe $\mathfrak{S}_n$ est la permutation des variables X_i . Dans ce cas, les espaces $D_{\text{unip}}^{\text{st}}$ et D_{unip} coïncident. Une base de cet espace est donnée par les intégrales orbitales sur les orbites unipotentes de $GL(n) = \mathbf{GL}(n, F)$. Soit $\mathcal{O}$ une orbite unipotente de $GL(n)$. On sait alors qu'il existe un sous-groupe parabolique standard $P = MN$ pour lequel $\mathcal{O}$ est une orbite de Richardson. On associe à M une fonction, dite de Harish-Chandra de la façon suivante. Pour toute racine α du tore diagonal, qui correspond, avec les notations usuelles, disons à $e_i - e_j$,

posons

$$\mathbf{c}_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \frac{1 - q^{-1}x_i x_j^{-1}}{1 - x_i x_j^{-1}}$$

On définit $\mathbf{c}_M$, la fonction de Harish-Chandra, de M , par la formule :

$$\mathbf{c}_M(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\alpha} \mathbf{c}_\alpha(x_1, \dots, x_n)$$

où le produit porte sur toutes les racines α contenues dans l'algèbre de Lie de M . On a alors l'identité suivante, qui est due à Macdonald. Pour tout $f \in \mathcal{H}(GL(n))$,

$$\int_{\mathcal{O}} f = * \int_{\widehat{T}_u} S(f)(x_1, \dots, x_n) \mathbf{c}_M(x_1, \dots, x_n)^{-1} d^\times x_1 \cdots d^\times x_n$$

où le membre de gauche est l'intégrale orbitale sur $\mathcal{O}$ de f , S désigne l'isomorphisme de Satake, $\widehat{T}_u = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n; |x_1| = \dots = |x_n| = 1\}$, et enfin $*$ est une constante. On peut donc dire que la transformée de Satake d'un élément de $D_{\text{unip}}^{\text{st}}$ est donnée par (l'intégration sur $\widehat{T}_u$ contre) une fonction rationnelle en n -variables. Signalons au passage que dans ce cas les fonctions $\mathbf{c}_M$ sont totalement explicites.

Pour $\mathbf{H}$ général, on espère qu'il existe une formule analogue. L'objet de cet article est de démontrer quelques résultats et de comprendre un peu $D_{\text{unip}|\mathcal{H}(H)}^{\text{st}}$ lorsque le groupe $\mathbf{H}$ est un groupe symplectique. Supposons désormais que $\mathbf{H} = \mathbf{Sp}(2n)$. Précisons un peu à quoi on peut s'attendre. Nous allons avoir besoin de la description de $D_{\text{unip}}^{\text{st}}$ pour le groupe symplectique. La référence est [Wa2] dont nous reprenons librement les notations. Pour n, k deux entiers positifs, notons $S_{n,k}$, resp. $S_{n,\text{imp}}$, l'ensemble des symboles de rang n et de défaut k , resp. de défaut impair. On a : $S_{n,\text{imp}} = \cup_{k(k+1) \leq n} S_{n,2k+1}$. Notons $\mathcal{I}^{\text{st}}(n)$ l'ensemble des couples (k, ρ) où :

- k est un entier naturel tel que $k(k+1) \leq n$;
- ρ est une représentation irréductible de $W(C_{n-k(k+1)})$ — le groupe de Weyl de type $C_{n-k(k+1)}$.

Pour k fixé, notons $\mathcal{I}_k^{\text{st}}(n)$ l'ensemble des tels couples dont le premier facteur est égal à k . On dispose alors d'une bijection combinatoire :

$$S_{n,\text{imp}} \longleftrightarrow \mathcal{I}^{\text{st}}(n)$$

de sorte que pour tout $k, k(k+1) \leq n$,

$$S_{n,2k+1} \longleftrightarrow \mathcal{I}_k^{\text{st}}(n)$$

Dans [Wa2], l'auteur construit une base de $D_{\text{unip}}^{\text{st}}$ que nous allons noter $\mathcal{B}$. Cette base est paramétrée par $S_{n,\text{imp}}$ (et donc par $\mathcal{I}^{\text{st}}(n)$, d'après ce qui précède). Pour $(k, \rho) \in \mathcal{I}^{\text{st}}(n)$, soit $I_{k,\rho}$, l'élément de $\mathcal{B}$ correspondant. Voici ce que nous pouvons attendre de $\mathcal{D}_{\text{unip}|\mathcal{H}(H)}^{\text{st}}$:

RÉSULTATS ESPÉRÉS 1

(1) –Annulation– Pour tout $(k, \rho) \in \mathcal{I}^{\text{st}}(n)$ tel que $k \neq 0$, la restriction de $I_{k, \rho}$ à $\mathcal{H}(H) = \mathcal{H}(Sp(2n))$ est nulle.

(2) –Base proposée pour $\mathcal{D}_{\text{unip}|\mathcal{H}(H)}^{\text{st}}$ – Les restrictions à $\mathcal{H}(H)$ des éléments $I_{0, \rho}$, $(0, \rho) \in \mathcal{I}_0^{\text{st}}(n)$ forment une base de $\mathcal{D}_{\text{unip}|\mathcal{H}(H)}^{\text{st}}$

(3) –Transformées de Satake des éléments de $\mathcal{B}$ – En plus, pour tout $(0, \rho) \in \mathcal{I}_0^{\text{st}}(n)$, il existe une fonction rationnelle c_ρ en n variables, invariante par le groupe de Weyl $W(C_n)$, sans pôle au voisinage de $\widehat{T}_u$, telle que pour tout $f \in \mathcal{H}(H)$, on ait l'égalité :

$$I_{0, \rho}(f) = \int_{\widehat{T}_u} S(f)(x_1, \dots, x_n) c_\rho(x_1, \dots, x_n) d^\times x_1 \cdots d^\times x_n.$$

Ces énoncés ont été démontrés dans cet article pour $n = 2$. La preuve s'appuie essentiellement sur les calculs de Assem dans [As2]. Pour $n > 2$, on n'a malheureusement pas assez de résultats sur les intégrales orbitales unipotentes des éléments de l'algèbre de Hecke sphérique.

Approche par les traces compactes

Dans cet article, comme on a déjà dit au début de cette introduction, il n'est pas question de calculer les fonctions c_ρ , mais plutôt de donner une description de l'espace engendré par celles-ci. Comment donc trouver des fonctions susceptibles d'engendrer cet espace ? Par analogie, il semble naturel de penser aux distributions traces sur H , ou plus précisément aux traces compactes. Pour π une représentation lisse, irréductible de H , soit $\text{tr}_c \pi$ la distribution trace compacte correspondante (voir le chapitre suivant pour une définition précise). Notre conviction d'utiliser ces distributions provient, entre autres, d'un résultat de Courtès :

$$\mathcal{D}_{\text{unip}|\mathcal{H}(H)} = \mathbb{C}\{\text{tr}_c \pi; \pi \text{ tempérée}\}_{|\mathcal{H}(H)}$$

l'espace engendré par les restrictions à $\mathcal{H}(H)$ des traces compactes des représentations tempérées de H .

Par application d'une formule de Clozel (cf. formule 1.7 pour θ trivial), il suffit de considérer les sous-quotients d'une série principale non ramifiée; les autres étant de restriction nulle sur $\mathcal{H}(H)$. D'autre part, il s'agit ici de distributions stables, il faut donc regrouper les représentations en des L -paquets. On est ainsi amené à calculer des traces compactes des L -paquets tempérés, et contenant un sous-quotient d'une série principale non-ramifiée. Mais là encore, on comprend assez mal ces objets. En tout cas, on n'est pas tenté de calculer ces traces mais plutôt de ramener ces objets sur un terrain plus familier avant d'effectuer les calculs nécessaires.

Transfert vers le groupe linéaire

On note $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(2n+1)$ que l'on munit d'une involution θ dont la définition est donnée par la formule 2.1. Posons : $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \rtimes \{1, \theta\}$. Comme l'a remarqué Arthur, le groupe $\mathbf{H}$ est alors un groupe endoscopique tordu de $\tilde{\mathbf{G}}$, au sens de Kottwitz-Shelstad [K-S]. Nous n'entrons pas dans les détails mais notons simplement que le groupe dual de $\mathbf{H}$, le groupe $\mathbf{SO}(2n+1, \mathbb{C})$, est la composante neutre du centralisateur dans $\mathbf{GL}(2n+1, \mathbb{C}) \rtimes \{1, \theta\}$ de l'élément

$$\text{diag}(1, -1, 1, -1, \dots, 1) \rtimes \theta$$

La philosophie de Langlands suggère alors un transfert des L -paquets en question sur H vers des L -paquets sur G . Remarquons que pour le groupe linéaire chaque L -paquet est constitué d'une seule représentation. Il s'agit de l'endoscopie tordue, on est amené à calculer les traces tordues compactes de telles représentations sur $\mathcal{H}(G)$, l'algèbre de Hecke sphérique de G . La définition de la trace tordue compacte se trouve au premier chapitre. Explicitons l'ensemble des représentations de G qui nous intéressent. Posons :

$$\mathcal{A}^{\text{st}}(n) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha^+, \alpha^-, \beta \text{ des partitions telles que :} \\ \bullet S(\alpha^+) + S(\alpha^-) + 2S(\beta) = 2n+1; \\ \bullet \text{les partitions } \alpha^+, \alpha^- \text{ sont constituées} \\ \quad \text{de nombres impairs, de multiplicité 1;} \\ \bullet \text{le nombre de termes de } \alpha^- \text{ est pair;} \end{array} \right\}$$

où on a noté $S(\alpha^+)$ pour la somme des termes de la partition α^+ , *idem* pour $S(\alpha^-), S(\beta)$. L'ensemble des représentations de G qui nous intéressent est alors paramétré par :

- un triplet $(\alpha^+ = (\alpha_1^+, \dots, \alpha_r^+), \alpha^- = (\alpha_1^-, \dots, \alpha_s^-), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_t)) \in \mathcal{A}^{\text{st}}(n)$;
- des nombres complexes $z_1, \dots, z_t$.

Pour k_1, k_2 deux entiers strictement positifs, π_1, π_2 deux représentations de $GL(k_1), GL(k_2)$ respectivement, nous notons $\pi_1 \times \pi_2$ l'induite parabolique normalisée de $\pi_1 \otimes \pi_2$ à $GL(k_1 + k_2)$. Soit $(\alpha^+, \alpha^-, \beta, z)$ un tel paramètre. La représentation que l'on associe à ces données est

$$\begin{aligned} \pi' = & |\cdot|^{z_1} \text{St}_{\beta_1} \times \cdots \times |\cdot|^{z_t} \text{St}_{\beta_t} \times \text{St}_{\alpha_1^+} \times \cdots \times \text{St}_{\alpha_r^+} \times \xi \text{St}_{\alpha_1^-} \times \cdots \times \xi \text{St}_{\alpha_s^-} \\ & \times |\cdot|^{-z_t} \text{St}_{\beta_t} \times \cdots \times |\cdot|^{-z_1} \text{St}_{\beta_1} \end{aligned}$$

où St_m désigne la représentation de Steinberg de $GL(m)$, ξ est le caractère quadratique non ramifié non trivial de $F^\times$. Notons π la représentation :

$$\pi = \text{St}_{\beta_1} \times \cdots \times \text{St}_{\beta_t} \times \text{St}_{\alpha_1^+} \times \cdots \times \text{St}_{\alpha_r^+} \times \xi \text{St}_{\alpha_1^-} \times \cdots \times \xi \text{St}_{\alpha_s^-} \times \text{St}_{\beta_t} \times \cdots \times \text{St}_{\beta_1}$$

On peut alors montrer que pour tout $f \in \mathcal{H}(G)$,

$$\text{tr}_{\theta-c} \pi(f) = \text{tr}_{\theta-c} \pi'(f)$$