MÉMOIRES DE LA SMF 98

COBORDISME COMPLEXE DES ESPACES PROFINIS ET FONCTEUR T DE LANNES

François-Xavier Dehon

Société Mathématique de France 2004
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

F.-X. Dehon
UMR 6621 du CNRS, Laboratoire J.A. Dieudonné,
Université de Nice-Sophia-Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France.
E-mail : dehon@math.unice.fr

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 55Q05 ; 18C15, 55N22, 55R37, 55S25, 55Uxx.

***Mots clefs*. —** Algèbres sur une monade, algèbres instables, classes d'homotopie d'applications, cobordisme complexe, espaces classifiants, espaces fonctionnels, espaces profinis, foncteur T, résolutions.

L'auteur a bénéficié pendant la réalisation de ce travail d'une bourse individuelle Marie Curie de la Commission européenne (HPMF-CT-1999-00135).

COBORDISME COMPLEXE DES ESPACES PROFINIS ET FONCTEUR T DE LANNES

François-Xavier Dehon

***Résumé*. —** Nous montrons dans ce mémoire que la MU-cohomologie continue des espaces fonctionnels de source le classifiant $\mathrm{B}\pi$ d'un groupe de Lie compact commutatif et de but le pro-p-complété d'un espace dont la cohomologie à coefficients dans les entiers p-adiques est sans torsion est l'image de la MU-cohomologie complétée en p de l'espace au but par un foncteur $\mathrm{T}_{\mathrm{B}\pi}$ analogue au foncteur T associé à la cohomologie modulo p du classifiant du groupe cyclique d'ordre p.

***Abstract* (Complex cobordism of profinite spaces and Lannes' T-functor)**

We show in this paper that the continuous MU-cohomology of the mapping spaces from the classifying space $\mathrm{B}\pi$ of some commutative compact Lie group to the pro-p-completion of a space whose p-adic cohomology is torsion free is the image of the p-completed MU-cohomology of the target space by a functor $\mathrm{T}_{\mathrm{B}\pi}$ analogous to the functor T associated to the classifying space of the cyclic group of order p.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

Ce mémoire fait suite à [**DL**] (et [**KW**]). Soient p un nombre premier fixé, π un groupe de Lie compact commutatif, X un espace dont la cohomologie à coefficients dans l'anneau des entiers p-adiques est sans torsion et désignons par MU le spectre représentant le cobordisme complexe. Nous montrons que la MU-cohomologie complétée en p continue de l'espace fonctionnel de source le classifiant $\mathrm{B}\pi$ de π et de but le p-complété profini de X est l'image par un foncteur $\mathrm{T}_{\mathrm{B}\pi}$ de la MU-cohomologie complétée en p de X, et étendons ainsi les résultats de J. Lannes ([**La1**]) concernant la cohomologie modulo p des espaces fonctionnels de source le classifiant d'un produit de groupes cycliques d'ordre p.

Indiquons ce dont il s'agit :

Notre théorie homotopique est celle des ensembles profinis simpliciaux (ou espaces profinis) où les équivalences faibles sont les applications simpliciales continues induisant un isomorphisme en cohomologie modulo p continue ([**Mo2**]). On note $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ la catégorie homotopique associée. (La raison pour laquelle nous avons besoin des espaces profinis et de leurs cohomologies continues plutôt que des espaces et cohomologies ordinaires apparaîtra ci-dessous.)

Soient W un ensemble simplicial qu'on écrit comme la colimite de ses sous - ensembles finis simpliciaux W_α, et X un espace profini. L'espace profini fonctionnel $\mathrm{hom}(W, X)$ est l'adjoint à droite en X du foncteur $\widehat{S} \to \widehat{S}$, $Z \mapsto W \widehat{\times} Z = \mathrm{colim}_\alpha(W_\alpha \times Z)$. Si X est fibrant, l'ensemble (profini) $\pi_0 \,\mathrm{hom}(W, X)$ s'identifie à l'ensemble $[W, |X|]$ des classes d'homotopie simpliciale d'applications de W dans l'espace sous-jacent à X, donc à l'ensemble des morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(W \widehat{\times} \mathrm{pt}, X)$, où $W \widehat{\times} \mathrm{pt}$ est le complété profini de W. (Voir les sections 1.2 et 1.3.)

Notons H^*Z la cohomologie modulo p continue d'un espace profini Z, $\mathcal{E}$ la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels gradués et soit E un objet de $\mathcal{E}$. Il existe un espace profini $\mathrm{K}_{\mathrm{H}}(E)$ et un morphisme $E \to \mathrm{H}^*\mathrm{K}_{\mathrm{H}}(E)$ induisant une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(Z, \mathrm{K}_{\mathrm{H}}(E)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \mathrm{H}^*Z)$ naturelle en $Z \in \mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$. La catégorie $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$ des algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p coïncide avec la catégorie des algèbres associées à la monade $E \mapsto \mathrm{H}^*\mathrm{K}_{\mathrm{H}}(E)$ sur $\mathcal{E}$, de sorte que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(Z, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{H}}}(\mathrm{H}^*Y, \mathrm{H}^*Z)$$

est une bijection pour tout espace profini Z lorsque Y est isomorphe à $\mathrm{K}_{\mathrm{H}}(E)$ pour un $E \in \mathcal{E}$ ([**La2**], voir la section 3.2).

Si la cohomologie modulo p de l'espace W est finie en chaque degré alors on a pour tout espace profini Z un isomorphisme de Künneth $\mathrm{H}^*W \otimes \mathrm{H}^*Z \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*W \widehat{\times} Z$ (lemme 5.1.3) et l'endofoncteur $N \mapsto \mathrm{H}^*W \otimes N$ de $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$ admet un adjoint à gauche $(- : \mathrm{H}^*W)_{\mathcal{K}_{\mathrm{H}}}$. L'application d'évaluation $W \widehat{\times} \hom(W, X) \to X$ induit un morphisme

$$(\mathrm{H}^*X : \mathrm{H}^*W)_{\mathcal{K}_{\mathrm{H}}} \longrightarrow \mathrm{H}^* \hom(W, X)$$

qui est un isomorphisme si X est fibrant dans $\widehat{S}$ et isomorphe dans $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ à $\mathrm{K}_{\mathrm{H}}(E)$ pour un $E \in \mathcal{E}$. (Il faudrait imposer H^*W de dimension totale finie ou E nul en degré assez grand pour avoir un tel isomorphisme si on utilisait les espaces et la cohomologie modulo p ordinaires.) (Voir la section 5.1.)

Lorsque W est le classifiant $\mathrm{B}V$ d'un produit fini de groupes cycliques d'ordre p, l'application

$$[\mathrm{B}V, |X|] \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{H}}}(\mathrm{H}^*X, \mathrm{H}^*\mathrm{B}V)$$

est une bijection et le morphisme

$$(\mathrm{H}^*X : \mathrm{H}^*\mathrm{B}V)_{\mathcal{K}_{\mathrm{H}}} \longrightarrow \mathrm{H}^* \hom(\mathrm{B}V, X)$$

est un isomorphisme pour tout espace profini fibrant X ([**La1**], [**Mo2**]). Ceci vient des propriétés exceptionnelles de la cohomologie modulo p de $\mathrm{B}V$ comme module et algèbre instable sur l'algèbre de Steenrod ([**La1**]). (A nouveau il faudrait imposer des hypothèses de finitude sur X si on utilisait les espaces et la cohomologie modulo p ordinaires.)

Dans [**DL**] on montre pour π un groupe de Lie compact commutatif que la cohomologie modulo p continue de l'espace fonctionnel $\hom(\mathrm{B}\pi, X)$ possède des propriétés d'exactitude en la cohomologie modulo p de X lorsque la cohomologie à coefficients p-adiques de X est sans torsion (on dit alors que X est sans p-torsion), puis on reprend l'idée de Kuhn et Winstead ([**KW**]) d'utiliser le début d'une MU-résolution de l'espace au but X : Les propriétés d'exactitude mises en évidence et le fait que les espaces formant le début de cette MU-résolution sont également sans p-torsion font que l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $[\mathrm{B}\pi, |X|]$ s'exprime en terme de la structure d'algèbre instable des MU-cohomologies complétées en p de X et de $\mathrm{B}\pi$.

Notons $\widehat{\mathrm{MU}}^*Z$ la MU-cohomologie (complétée en p) continue d'un espace profini Z (voir la section 1.6), $\mathcal{E}$ns-gr la catégorie des ensembles $\mathbb{Z}$-gradués et soit S un objet de $\mathcal{E}$ns-gr. Il existe un espace profini $\mathrm{K}(S)$ et un morphisme $S \to \widehat{\mathrm{MU}}^*\mathrm{K}(S)$ induisant une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(Z, \mathrm{K}(S)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\mathrm{ns\text{-}gr}}(S, \widehat{\mathrm{MU}}^*Z)$ naturelle en $Z \in \mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$. On définit la catégorie $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ des MU-algèbres instables comme la catégorie des algèbres associées à la monade $S \mapsto \widehat{\mathrm{MU}}^*\mathrm{K}(S)$ sur $\mathcal{E}$ns-gr, de sorte que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(Z, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\widehat{\mathrm{MU}}^*Y, \widehat{\mathrm{MU}}^*Z)$$

est une bijection pour tout espace profini Z lorsque Y est isomorphe à $\mathrm{K}(S)$ pour un $S \in \mathcal{E}$ns-gr.

Nous définissons une catégorie abélienne $\widehat{\mathcal{M}}$ munie d'un produit tensoriel $\widehat{\otimes}$ avec les propriétés suivantes :

(1) La MU-cohomologie continue d'un espace profini Z est naturellement un objet de $\widehat{\mathcal{M}}$ et en est un objet projectif si la cohomologie continue à coefficients p-adiques de Z est sans torsion. (Voir la section 2.)

(2) La structure de spectre en anneau de MU induit pour tout espace W et pour tout espace profini Z un morphisme $\widehat{\mathrm{MU}}^*W \widehat{\otimes} \widehat{\mathrm{MU}}^*Z \to \widehat{\mathrm{MU}}^*(W \widehat{\times} Z)$ qui est un isomorphisme si la cohomologie à coefficients p-adiques de W est sans torsion et de type fini en chaque degré (lemme 5.2.1).

(3) Soit W un espace dont la cohomologie à coefficients p-adiques est sans torsion et de type fini en chaque degré ; alors l'endofoncteur $N \mapsto \widehat{\mathrm{MU}}^*W \widehat{\otimes} N$ de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ admet un adjoint à gauche $(- : \widehat{\mathrm{MU}}^*W)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}$. L'application d'évaluation $W \widehat{\times} \operatorname{hom}(W, X) \to X$ induit un morphisme

$$(\widehat{\mathrm{MU}}^*X : \widehat{\mathrm{MU}}^*W)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{MU}}^* \operatorname{hom}(W, X)$$

qui est un isomorphisme si X est fibrant dans $\widehat{\mathcal{S}}$ et isomorphe dans $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ à $\mathrm{K}(S)$ pour un $S \in \mathcal{E}$ns-gr. (Voir la section 5.2.)

L'un des principaux résultats de ce mémoire est le suivant (voir la section 7) :

THÉORÈME 0.1. — *Soient T un tore, $\mathrm{B}T$ son classifiant et X un espace profini fibrant dont la cohomologie continue à coefficients p-adiques est sans torsion ; alors le morphisme*

$$(\widehat{\mathrm{MU}}^*X : \widehat{\mathrm{MU}}^*\mathrm{B}T)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{MU}}^* \operatorname{hom}(\mathrm{B}T, X)$$

est un isomorphisme.

Nous n'avons pas besoin d'expliciter la structure de MU-algèbre instable pour obtenir ce résultat. Nous renvoyons le lecteur à [**RW**] et [**BJW**] pour une telle étude. La définition de la catégorie $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ est formelle et ne dépend pas de propriétés du spectre MU autres que l'existence d'une MU-cohomologie continue. Cette existence est garantie par le fait que le n-ième terme du Ω-spectre associé à MU est, pour n assez grand, connexe et de cohomologie modulo p finie en chaque degré ; mais on sait également définir la K-théorie continue d'un espace profini. (Voir la section 1.6.)

Les propriétés (1) et (2) dépendent essentiellement de la dégénérescence de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch associée au spectre MU et à un espace profini dont la cohomologie continue à coefficients p-adiques est sans torsion (espace profini sans p-torsion). Une fois celles-ci établies, la propriété (3) est de nature formelle.

La démonstration du théorème 0.1 utilise de façon cruciale comme [**DL**] les propriétés du foncteur T de Lannes et son interprétation géométrique. Elle repose également sur les propriétés suivantes du spectre MU :

– La cohomologie à coefficients p-adiques des espaces formant le Ω-spectre associé à MU est sans torsion en chaque degré ([**Wi**]).

– La MU-résolution cosimpliciale canonique d'un espace profini sans p-torsion induit un diagramme simplicial augmenté acyclique en cohomologie modulo p (voir le corollaire 4.2.2).

Cette dernière propriété n'est plus vraie si on remplace la MU-cohomologie par la K-théorie. Elle vient de l'existence d'un morphisme de spectres en anneau $\mathrm{MU} \to \mathrm{H}\mathbb{Z}/p$.

Nous étendons la définition des foncteurs de division (foncteur T_W en section 5.3) pour prendre en compte des espaces à la source tel que le classifiant d'un p-groupe cyclique. La cohomologie à coefficients p-adiques de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ n'est pas sans torsion mais on dispose cependant d'une formule de Künneth en MU-cohomologie ([**Lan**]). On en déduit une expression de $\mathrm{T}_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n}$ comme foncteur adjoint du produit tensoriel par $\widehat{\mathrm{MU}}^*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ (corollaire 8.9).

Le théorème 0.1 est un cas particulier du théorème suivant (section 7) :

THÉORÈME 0.2. — *Soient π un groupe de Lie compact commutatif et X un espace profini fibrant dont la cohomologie continue à coefficients p-adiques est sans torsion ; alors on a un isomorphisme*

$$\mathrm{T}_{\mathrm{B}\pi}\widehat{\mathrm{MU}}^*X \cong \widehat{\mathrm{MU}}^* \hom(\mathrm{B}\pi, X).$$

On en déduit un calcul des classes d'homotopie d'applications de $\mathrm{B}\pi$ dans l'espace sous-jacent à X (comparer avec la proposition 6.8 ou le théorème 7.20 de [**DL**]) :

COROLLAIRE 0.3. — *Soient π un groupe de Lie compact commutatif et X un espace profini fibrant dont la cohomologie continue à coefficients p-adiques est sans torsion ; alors l'application*

$$[\mathrm{B}\pi, |X|] \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\widehat{\mathrm{MU}}^*X, \widehat{\mathrm{MU}}^*\mathrm{B}\pi)$$

est une bijection.

Voici le plan de ce mémoire :

Les sections 1 à 5 exposent la théorie de l'homotopie et l'algèbre nécessaires pour obtenir les foncteurs de division en MU-cohomologie associés aux espaces fonctionnels $\hom(W, X)$.

La section 4 est un peu à part. On y étudie d'une part l'exactitude du produit tensoriel dans $\widehat{\mathcal{M}}$ et la commutation de ce produit tensoriel aux limites indexées par $\mathbb{N}$, d'autre part la résolution des espaces profinis par des espaces profinis sans p-torsion et les suites spectrales associées dans l'esprit de [**CS**] et [**Ad1**].