Astérisque

L. SZPIRO

Discriminant et conducteur des courbes elliptiques

Astérisque, tome 183 (1990), p. 7-18

http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__183__7_0

© Société mathématique de France, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DISCRIMINANT ET CONDUCTEUR

DES COURBES ELLIPTIQUES

L. Szpiro

Cet exposé présente une conjecture sur le discriminant des courbes elliptiques (conjecture 1 dans le texte). Ce sujet a été traité par de nombreux auteurs depuis que je m'en suis préoccupé. (Citons : [V], [O] [H]). Je n'ai donc pas voulu trop alourdir le contenu de ce court exposé et me suis contenté, en tentant de garder l'intelligibilité du texte, de n'y inclure que des faits non écrits ailleurs.

Le premier paragraphe expose la conjecture et en donne la preuve pour le corps de fonctions via la classe de Kodaira-Spencer.

Le deuxième paragraphe explique les exemples de Frey, qui donnent de mirifiques conséquences de la conjecture 1. D'autres conséquences seront expliquées dans le reste du séminaire. Au paragraphe 3 nous étudions le discriminant des courbes de Weil et nous donnons des exemples, dus à A. Douady, qui montrent la difficulté des problèmes qui se posent.

Les notations et conventions adoptées dans cet article sont celles de [Sz 1] et de [D]. En particulier une courbe elliptique sera toujours munie d'une section unité ([D]), si elle a un modèle semi-stable celui-ci sera régulier ([Sz 1]) (compactification relative du modèle de Néron). Je remercie le rédacteur de la revue Astérisque pour le travail minutieux effectué sur ce court article.

[L'exposé oral du séminaire sur ce sujet a été fait par M. Hindry. Je me suis inspiré de ses notes [H] dans le § 2 .

1. UNE CONJECTURE SUR LE DISCRIMINANT DES COURBES ELLIPTIQUES.

En 1978 j'ai démontré le théorème qui suit, reliant le "discriminant" et le "conducteur" d'une courbe elliptique sur un corps de fonctions. La démonstration de cet énoncé est essentiellement contenue dans [Sz 1]. Mais, bien des mathématiciens s'en sont plaints, car les énoncés de loc. cit. semblent ne concerner que les courbes de genre au moins deux.

THÉORÈME 1. Soit $f : E \rightarrow C$ un morphisme propre et plat d'une surface E ,

lisse sur un corps k , dans une courbe C , projective,

lisse de genre q et géométriquement connexe sur e .

Supposons que la fibre générique de f soit une courbe elliptique

lisse et géométriquement connexe sur le corps de fonctions de C .

Supposons de plus que f ne soit pas isotrivial et que ses fibres

dégénérées soient semi-stables. Alors, si Δ_E est le diviseur

discriminant de f et si s est le nombre de points géométriques

de C dont la fibre n'est pas lisse on a :

$$\text{deg } \Delta_E \leq p^e (6(2q - 2) + s)$$

où p est la caractéristique de k , et p^e le degré d'insépa-

rabilité du morphisme de C dans la droite des "j", déduit

de f . (Si la caractéristique de k est nulle on convient

que $p^e = 1$).

Démonstration. On a deux suites exactes fondamentales :

$$(I) \quad 0 \rightarrow f^* \Omega_{C/k}^1 \rightarrow \Omega_{E/k}^1 \rightarrow \Omega_{E/C}^1 \rightarrow 0$$

$$(II) \quad 0 \rightarrow \Omega_{E/C}^1 \rightarrow \omega_{X/C} \rightarrow \oplus k(P) \rightarrow 0$$

P singulier

dans sa fibre

où $\Omega_{Y/Z}^1$ est le faisceau des différentielles de Y sur Z , et $\omega_{Y/Z}$ est le faisceau dualisant relatif si $Y \rightarrow Z$ est localement d'intersection complète.

Notons S le diviseur réduit de C tel que $E \rightarrow C$ soit lisse sur $C - S$. En appliquant le foncteur f_* aux deux suites on obtient :

a) un morphisme

$$f_* \Omega_{E/C}^1 \rightarrow R^1 f_* f^* \Omega_{C/k}^1 = \Omega_{C/k}^1 \otimes \omega_E^{-1}$$

où $\omega_E = f_* \omega_{E/C}$ (notons que $\omega_{E/C} = f^* \omega_E$). Ce morphisme coïncide avec l'application de Kodaira-Spencer sur $C - S$ (qui ici n'est autre que la dérivée de l'application j).

b) $0 \rightarrow f_* \Omega_{E/C}^1 \rightarrow \omega_E \rightarrow \bigoplus k(P)$
 P singulier...

On déduit de cette suite exacte que

$$f_* \Omega_{E/C}^1 \simeq \omega_E(-S) \quad (S \text{ est réduit !!})$$

On a donc, par a) et b) un morphisme

$$\omega_E^{\otimes 2} \rightarrow \Omega_{C/k}^1(S)$$

qui est non nul quand la dérivée de l'application j ne s'annule pas. En caractéristique zéro c'est le cas si j n'est pas constant, en caractéristique $p > 0$ c'est le cas si f n'est pas un "pull-back" par le morphisme de Frobenius de C .

En prenant les degrés de ces deux faisceaux inversibles, et en notant qu'on a $\deg \Delta_E = 12 \deg \omega_E$ on obtient le théorème 1. $\square$

Notons qu'il est apparu, plus tard, de nombreuses démonstrations différentes (Frey [F1], Hindry-Silverman [H,S] par la formule d'Hurwitz quand $k = \mathbb{C}$ et encore plus tard par "a,b,c" [0] en toute caractéristique).

L'analogie entre les corps de nombres et les corps de fonctions d'une variable pousse à conjecturer un énoncé analogue pour les courbes elliptiques sur un corps de nombres. Cette analogie est renforcée par la théorie d'Arakelov, qui en mettant des métriques, dites permises, aux places à l'infini donne un degré "naturel" $\deg_{Ar}(\omega_E)$ au faisceau ω_E défini plus haut.

Ces idées se trouvent confortées par le théorème suivant dont j'ai publié une démonstration dans [Sz 2] :

THÉORÈME. Soit E une courbe elliptique semi-stable sur un corps de nombres K alors on a :

$$12 \deg_{Ar}(\omega_E) = \log \text{Norme}_{K/\mathbb{Q}}(\Delta_{\min}(E)) .$$

J'ai donc soumis, notamment à l'occasion de l'école d'été de Hanovre en septembre 82, la conjecture suivante :

CONJECTURE 1. Soit K un corps de nombres, il existe une constante $\sigma(K)$ ne dépendant que de K telle que, pour toute courbe elliptique E sur K , de conducteur N_E et de discriminant minimal Δ_E on ait :

$$\text{Norme}_{K/\mathbb{Q}}(\Delta_E) \leq (\text{Norme}_{K/\mathbb{Q}}(N_E))^{\sigma(K)} .$$

On peut énoncer une conjecture plus optimiste :

CONJECTURE 1 forme forte. Soit K un corps de nombres. Alors pour tout nombre réel positif ϵ , il existe une constante $C(K, \epsilon)$ telle que :