

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

REPRÉSENTATIONS GÉNÉRIQUES DES GROUPES LINÉAIRES FINIS EN INÉGALE CARACTÉRISTIQUE

Aurélien Djament & Thomas Gaujal

Tome 152
Fascicule 2

2024

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 295-354

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel
de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 152, juin 2024

Comité de rédaction

Boris ADAMCZEWSKI
François CHARLES
Gabriel DOSPINESCU
Clothilde FERMANIAN
Dorothee FREY

Youness LAMZOURI
Wendy LOWEN
Ludovic RIFFORD
Béatrice de TILIÈRE

François DAHMANI (Dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)

Abonnement électronique : 160 € (\$ 240),

avec supplément papier : Europe 244 €, hors Europe 330 € (\$ 421)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96

bulletin@smf.emath.fr • smf.emath.fr

© Société Mathématique de France 2024

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Fabien DURAND

REPRÉSENTATIONS GÉNÉRIQUES DES GROUPES LINÉAIRES FINIS EN INÉGALE CARACTÉRISTIQUE

PAR AURÉLIEN DJAMENT & THOMAS GAUJAL

RÉSUMÉ. — On étudie les *représentations génériques* des groupes linéaires sur un anneau fini R à coefficients dans un corps k dans lequel le cardinal de R est inversible, c'est-à-dire les foncteurs depuis les R -modules projectifs de type fini vers les k -espaces vectoriels. On obtient en particulier une classification de ces représentations *simples* qui permet de démontrer une conjecture de Djament-Touzé-Vespa sur les dimensions prises par un tel foncteur.

ABSTRACT (*Generic representations of finite general linear groups in nondescribing characteristic*). — We study *generic representations* of general linear groups over a finite ring R with coefficients in a field k in which the cardinality of R is invertible, that is functors from finitely-generated projective R -modules to k -vector spaces. We obtain especially a classification of such *simple* representations, what allows to prove a conjecture of Djament–Touzé–Vespa on dimensions taken by such a functor.

Texte reçu le 26 mai 2023, modifié le 29 janvier 2024, accepté le 22 février 2024.

AURÉLIEN DJAMENT, CNRS, laboratoire Analyse, Géométrie et Applications (UMR7539), Institut Galilée, Université Sorbonne Paris Nord, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France • *E-mail* : djament@math.cnrs.fr • *Url* : <https://djament.perso.math.cnrs.fr/>

THOMAS GAUJAL, Université de Lille, laboratoire Paul Painlevé (UMR8524), Cité scientifique, bât. M2, 59655 Villeneuve D'ascq CEDEX, France • *E-mail* : thomas.gaujaj@gmail.com

Classification mathématique par sujets (2010). — 18A25, 18E05, 18E10, 18E35, 19A99, 20G99, 20J99.

Mots clefs. — Catégories de foncteurs, catégories additives, foncteurs antipolynomiaux, foncteurs simples, recollements de catégories abéliennes.

Les auteurs ont bénéficié du soutien partiel de l'Agence Nationale de la Recherche, via le projet ANR ChroK (ANR-16-CE40-0003), le Labex CEMPI (ANR-11-LABX-0007-01), et, pour le premier auteur, le projet ANR AlMaRe (ANR-19-CE40-0001-01).

Introduction

Notations. — Dans tout l'article, la lettre \mathcal{A} désigne une catégorie additive essentiellement petite. On travaille sur un corps commutatif k (en particulier, les produits tensoriels de base non spécifiée sont pris sur k).

On note $k[-]$ le foncteur de k -linéarisation des ensembles vers les k -espaces vectoriels. Ainsi, si E est un ensemble, le k -espace vectoriel $k[E]$ a une base canonique qui s'identifie à E ; pour $e \in E$, on notera $[e] \in k[E]$ l'élément correspondant de cette base.

Prélude : représentations des groupes linéaires finis en inégale caractéristique.

— Soit R un anneau de cardinal fini N . Il est classique que la théorie des représentations k -linéaires des groupes linéaires $\mathrm{GL}_n(R)$ est totalement différente dans les deux situations suivantes.

1. **Égale caractéristique :** N est une puissance de la caractéristique p de k . Toutes ces représentations sont alors *polynomiales*; si J désigne le radical de R , le morphisme de groupes $\mathrm{GL}_n(R) \rightarrow \mathrm{GL}_n(R/J)$ induit par la réduction modulo J est surjectif et son noyau est un p -groupe, de sorte que les représentations k -linéaires irréductibles de $\mathrm{GL}_n(R)$ sont les mêmes que celles de $\mathrm{GL}_n(R/J)$. Ces représentations sont classifiées (au moins si k est assez gros), via la théorie des représentations des groupes algébriques par exemple.
2. **Inégale caractéristique :** N est inversible dans k . Les représentations k -linéaires irréductibles de $\mathrm{GL}_n(R)$ sont bien comprises si R est semi-simple, mais ce n'est plus le cas sinon, du moins pour n arbitraire. Ainsi, pour chaque nombre premier l , la classification des représentations complexes irréductibles de tous les groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/l^2\mathbb{Z})$ constitue un problème sauvage.

Cette dichotomie possède un analogue pour les *représentations génériques* des groupes linéaires sur R à coefficients dans k , c'est-à-dire les objets de catégories de foncteurs dont nous allons rappeler ci-dessous la définition et l'origine. Le présent article est consacré à ces représentations génériques dans le cas d'inégale caractéristique.

Représentations des petites catégories. — Suivant l'article classique de B. Mitchell [20], on peut considérer les petites catégories préadditives comme des anneaux à plusieurs objets et les foncteurs additifs de ces catégories vers la catégorie \mathbf{Ab} des groupes abéliens comme des modules sur celles-ci. Si \mathcal{C} est une petite catégorie (non nécessairement préadditive), un foncteur de \mathcal{C} vers les k -espaces vectoriels s'identifie à un foncteur additif de la catégorie préadditive $k[\mathcal{C}]$, obtenue par linéarisation des morphismes de \mathcal{C} , vers \mathbf{Ab} , ou encore à une représentation k -linéaire de \mathcal{C} . L'étude de ces foncteurs, dont la catégorie sera notée $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$, constitue de fait une généralisation naturelle des représentations linéaires des groupes, et possède des interactions fécondes avec ces dernières.

Représentations des catégories additives. — Un cas important est celui des foncteurs depuis une source *additive* \mathcal{A} . On peut alors distinguer les foncteurs additifs (notamment étudiés par Auslander [1], lorsque \mathcal{A} possède suffisamment de propriétés de finitude), qui constituent une sous-catégorie remarquable de la catégorie de tous les foncteurs, en général beaucoup plus difficile à comprendre. Si R est un anneau, on nomme depuis la série d'articles de N. Kuhn [16, 17, 18] (consacrée au cas où $R = k$ est un corps fini) *représentations génériques des groupes linéaires* sur R à coefficients dans k les foncteurs (non nécessairement additifs) de la catégorie des R -modules à gauche projectifs de type fini vers les k -modules. Ces représentations génériques forment une catégorie abélienne aux bonnes propriétés notée $\mathcal{F}(R, k)$. Elles interviennent notamment dans des questions de topologie algébrique (notamment dans le cas susmentionné où $R = k$ est un corps fini — cf. [14]) et d'homologie des groupes — cf. par exemple le survol [11].

Foncteurs polynomiaux et antipolynomiaux. — Fondamentale dans l'étude des foncteurs d'une catégorie additive vers une catégorie abélienne et dans leurs applications, la notion de *foncteur polynomial* introduite par Eilenberg et Mac Lane [10] constitue une généralisation de la notion de foncteur additif. Il existe toutefois des situations non triviales où il n'existe pas de foncteur polynomial non constant (voir la proposition 2.2), en particulier la situation *antipolynomiale* dont on rappelle maintenant la définition :

DÉFINITION 1 (Cf. définition 2.3). — Soit \mathcal{A} une catégorie additive.

1. On dit que \mathcal{A} est *k-triviale* si, pour tous objets x et y de \mathcal{A} , le groupe abélien $\mathcal{A}(x, y)$ est d'ordre fini et inversible dans k .
2. Un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ est dit *antipolynomial* s'il se factorise à travers un foncteur additif de \mathcal{A} vers une catégorie additive *k-triviale*.

De plus, on peut ramener l'étude des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ possédant assez de propriétés de finitude à celles de foncteurs polynomiaux et de foncteurs antipolynomiaux en un sens précisé dans [8, § 4] (qui motive l'introduction de la notion d'antipolynomialité) et brièvement rappelé dans la section 2.

Si R est un anneau fini, la situation d'égalité caractéristique est exactement celle où tous les foncteurs de longueur finie de $\mathcal{F}(R, k)$ sont polynomiaux, tandis que la situation d'inégalité caractéristique (on dit aussi que R est *k-triviale*) est exactement celle où tous les foncteurs de $\mathcal{F}(R, k)$ sont antipolynomiaux.

Si les foncteurs polynomiaux ont fait l'objet de nombreux travaux et possèdent une structure qui est assez bien comprise (voir par exemple Pirashvili [23] ou, plus récemment, [8, § 5], parmi un grand nombre d'autres articles), les foncteurs antipolynomiaux, auxquels notre article est consacré, ont reçu fort peu d'attention jusqu'à présent.

Précédents et inspirations. — En 2015, Kuhn [19] a démontré, à partir de résultats de Kovács [15] sur les représentations de monoïdes finis de matrices, le théorème suivant :

THÉORÈME 2 (Kuhn). — *Si \mathbb{F} est un corps fini n'ayant pas la même caractéristique que k , il existe une équivalence de catégories*

$$\mathcal{F}(\mathbb{F}, k) \simeq \prod_{n \in \mathbb{N}} k[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})]\text{-Mod}.$$

Ce résultat contraste fortement avec la situation d'égalité caractéristique : il implique en particulier que la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{F}, k)$ est *localement finie* (c'est-à-dire engendrée par des objets de longueur finie), alors que $\mathcal{F}(k, k)$ n'est jamais localement finie.

Le présent article est issu en grande partie de la thèse de doctorat [13] du second auteur, menée sous la direction du premier auteur. Cette thèse contient également une nouvelle démonstration, purement fonctorielle (sans recours aux résultats de Kovács), du théorème 2 de Kuhn, qui n'apparaît pas ici, tandis que les résultats des sections 10.2 et 11 de notre article ne figurent pas dans [13].

Les travaux récents de Nagpal [21, 22] nous ont inspirés : ils sont consacrés à une situation assez similaire à celle de Kuhn [19], mais qui donne lieu à une structure plus subtile, à savoir l'étude des foncteurs depuis la catégorie des *monomorphismes* des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps fini \mathbb{F} vers les k -espaces vectoriels lorsque k et \mathbb{F} sont de caractéristiques distinctes. Nagpal [21, § 4.2] a en particulier introduit des variantes des outils classiques que sont les foncteurs de *décalage* et de *différence* (dont la définition est rappelée au début de la section 2) qui constituent en quelque sorte des formes fonctorielles de la *restriction parabolique* en théorie des représentations des groupes linéaires (les foncteurs de décalage usuels étant des analogues de la restriction classique). La définition de ces foncteurs fait également sens pour les foncteurs de source additive, même si leurs propriétés formelles ne sont pas tout à fait les mêmes que celles des foncteurs de Nagpal. Nous étudions ces foncteurs, que nous notons $\bar{\tau}_x$ et $\bar{\delta}_x$, dans le contexte d'une source additive k -triviale (dont x est ici un objet), à la section 7 ; ils constituent un ingrédient crucial de notre travail.

Une autre source d'inspiration provient de l'article [25] de G. Powell, qui introduit, dans un cas particulier d'égalité caractéristique (la catégorie $\mathcal{F}(k, k)$, où k est un corps fini), des foncteurs fondamentaux, qu'il nomme foncteurs *co-Weyl*, dont la définition se généralise sans difficulté à une source additive arbitraire, et qui possèdent des propriétés spécifiques (notamment cohomologiques) dans la situation d'inégalité caractéristique que nous considérons (voir les sections 4 et 5).

Le théorème 2 montre en particulier que $\mathcal{F}(\mathbb{F}, k)$ est une catégorie semi-simple lorsque k est un corps de caractéristique nulle et \mathbb{F} un corps fini. On voit

en revanche facilement que la catégorie $\mathcal{F}(R, k)$ ne peut pas être semi-simple si R est un anneau non semi-simple (cf. l'exemple 4.2). En particulier, on ne peut pas s'attendre à une structure aussi simple pour les foncteurs d'une catégorie additive k -triviale arbitraire vers les k -espaces vectoriels qu'une décomposition telle que celle du théorème 2. Plutôt qu'une décomposition en produit direct, on obtient en général une stratification de la catégorie de foncteurs par des sous-catégories remarquables.

Résultats principaux. — Dans la section 8, nous définissons, lorsque la catégorie additive \mathcal{A} est k -triviale, des sous-catégories bilocalisantes¹ $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ (où d est un entier) telles que :

1. $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k) \subset \mathcal{F}_{d+1}(\mathcal{A}; k)$; $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ est réduite à 0 (resp. aux foncteurs constants) pour $d < 0$ (resp. $d = 0$);
2. si la catégorie des foncteurs *additifs* de \mathcal{A} vers \mathbf{Ab} est localement finie, alors tout foncteur de type fini de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ appartient à $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ pour un certain entier d (cela s'applique en particulier à $\mathcal{F}(R, k)$, où R est un anneau k -trivial);
3. si $A : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ est un foncteur additif, alors le foncteur linéarisé $k[A]$ appartient à $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ si et seulement si A est de longueur finie au plus égale à d .

La définition explicite des sous-catégories $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ s'inspire d'une des définitions des foncteurs polynomiaux et fait intervenir les foncteurs de décalage parabolique susmentionnés.

Nous démontrons dans la section 9 le théorème de structure suivant, qui constitue un analogue du théorème 2 pour une source beaucoup plus générale :

THÉORÈME 3. — *Supposons que la catégorie additive \mathcal{A} est k -triviale. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, il existe une équivalence de catégories*

$$\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k) / \mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k) \simeq \coprod k[\text{Aut}(A)]\text{-Mod}$$

où le produit est pris sur les classes d'isomorphisme de foncteurs additifs $A : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ de longueur finie d .

On montre en fait au théorème 9.9 un résultat plus précis, qui décrit explicitement l'équivalence de catégories précédente ainsi que les foncteurs section et co-section associés.

Une conséquence importante du théorème précédent est la description des foncteurs simples des catégories $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ à partir des représentations k -linéaires irréductibles des groupes $\text{Aut}(A)$, où A est un foncteur additif de longueur finie sur \mathcal{A} . Sous une légère hypothèse de finitude supplémentaire sur \mathcal{A} , cela

1. La définition de sous-catégorie *bilocalisante*, ainsi que d'autres notions classiques dans les catégories abéliennes utiles dans cet article, est rappelée dans l'appendice A.