Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

INDUCTION AUTOMORPHE POUR LES REPRÉSENTATIONS ELLIPTIQUES

Martin Fatou

Tome 152
Fascicule 2

2024

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 355-375

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel
de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 152, juin 2024

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 160 € ($ 240),
avec supplément papier : Europe 244 €, hors Europe 330 € ($ 421)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96
`bulletin@smf.emath.fr` • `smf.emath.fr`

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Fabien DURAND

Bull. Soc. Math. France
152 (2), 2024, p. 355-375

INDUCTION AUTOMORPHE POUR LES REPRÉSENTATIONS ELLIPTIQUES

PAR MARTIN FATOU

RÉSUMÉ. — Nous étendons l'application de relèvement pour l'induction automorphe définie par une identité de caractères à toutes les représentations elliptiques.

ABSTRACT (*Automorphic induction for elliptic representations*). — We extend the lift application for automorphic induction defined by a character identity to all elliptic representations.

Introduction

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien, soit E une extension cyclique de F de degré d et soit $m \geq 1$ un entier. D'après le théorème du corps de classes local, l'extension E est définie par un caractère $\kappa : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ tel que $\ker(\kappa) = \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$, où $\mathrm{N}_{E/F} : E^\times \to F^\times$ est l'application norme. L'induction automorphe (locale) est une application qui associe à une représentation lisse irréductible τ de $\mathrm{GL}_m(E)$ une représentation lisse irréductible π de $\mathrm{GL}_{md}(F)$ qui est κ-stable, i.e. isomorphe à $(\kappa \circ \det) \otimes \pi$. Cette

Texte reçu le 2 juin 2022, modifié le 9 novembre 2023, accepté le 12 janvier 2024.

MARTIN FATOU, Université Aix-Marseille, 163 avenue de Luminy, 13009 Marseille, France • *E-mail :* martin.fatou@univ-amu.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 22E50.

Mots clefs. — Induction automorphe, représentations elliptiques, opérateurs d'entrelacement, induction parabolique.

doi:10.24033/bsmf.2891

application s'exprime par une identité de caractères et correspond, via la correspondance de Langlands locale, à l'induction de E à F des représentations galoisiennes.

L'induction automorphe pour les représentations irréductibles génériques unitaires a été démontrée pour F de caractéristique nulle par G. Henniart et R. Herb dans [4], et pour F de caractéristique > 0 par G. Henniart et B. Lemaire dans [5]. Nous démontrons ici que cette application existe également pour les représentations (irréductibles) elliptiques en utilisant uniquement des arguments locaux (et grâce aux résultats de [4] et [5] qui ont été obtenus par une technique locale-globale). Ces méthodes locales constituent un des outils qui seront utilisés plus tard pour démontrer l'induction automorphe pour toutes les représentations unitaires.

Pour cela, nous nous inspirons de l'article de A. Badulescu et G. Henniart [1][1], qui concerne le changement de base. Rappelons que le changement de base associe à une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$ une représentation lisse irréductible σ-stable de $\mathrm{GL}_n(E)$ où σ est un générateur de $\mathrm{Gal}(E/F)$. Tout comme pour l'induction automorphe, l'application de changement de base s'exprime par une identité de caractères.

A. Badulescu et G. Henniart démontrent (en particulier) que le changement de base existe pour les représentations elliptiques (Theorem C). Nous suivons de très près leur article.

Nous donnons dans la première section l'identité de caractères définissant l'induction automorphe. Puis nous rappelons les différentes classifications des représentations. L'identité de caractères donnée en section 1 nécessite un opérateur d'entrelacement, c'est pourquoi nous les définissons en section 3. Nous définissons d'abord l'opérateur d'entrelacement d'une induite, puis d'un sous-quotient irréductible et enfin d'un sous-quotient irréductible d'une induite. Nous normalisons ces opérateurs en utilisant les fonctionnelles de Whittaker. En section 4 nous rappelons la construction des représentations elliptiques à partir des représentations irréductibles essentiellement de carré intégrable. Nous profitons des sections 5 et 6 pour rappeler des résultats déjà établis sur l'induction automorphe : en section 5 l'induction automorphe pour les représentations irréductibles essentiellement de carré intégrable et en section 6 la compatibilité entre l'induction parabolique et l'induction automorphe. Enfin nous démontrons notre théorème en section 7. Nous montrons que les représentations elliptiques admettent une induite automorphe en exploitant les propriétés des opérateurs d'entrelacement.

Je remercie Bertrand Lemaire pour son aide considérable ainsi que le rapporteur anonyme pour ses nombreuses remarques qui ont permis d'améliorer le texte.

1. Observons que [1] est écrit en caractéristique nulle mais que les résultats dont nous nous inspirons ici sont valables en toute caractéristique.

Notations et conventions. On note $|.|_F$ et $|.|_E$ les valeurs absolues normalisées de F et E.

On note H le groupe $\mathrm{GL}_m(E)$ et G le groupe $\mathrm{GL}_n(F)$ où $n = md$.

On verra κ comme un caractère de G, toujours noté κ, via $\kappa(g) = \kappa(\det g)$ pour $g \in G$.

Nous ne considérerons que des représentations lisses complexes, i.e. à valeurs dans le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Pour une représentation π de G, on note $\kappa\pi$ la représentation $(\kappa \circ \det) \otimes \pi$.

1. Définition de l'induction automorphe

Soit τ une représentation irréductible de H.

On définit la notion de κ-relèvement de τ.

Pour cela il faut d'abord définir la notion d' intégrales orbitales qui se correspondent puis on définira le κ-relèvement à l'aide d'une égalité de caractères.

1.1. Induction parabolique. — On note P_0 le sous-groupe de Borel de G formé des matrices triangulaires supérieures et A_0 le tore maximal de G formé des matrices diagonales. Un sous-groupe parabolique, resp. de Levi, de G est dit *standard*, resp. *semi-standard* s'il contient P_0, resp. A_0. Nous ne considérerons dans la suite que des sous-groupes de Levi standard, i.e. des sous-groupes de matrices diagonales par blocs de tailles données. Par exemple pour G, si $n_1, \ldots, n_k$ sont les tailles des blocs avec $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, alors L, sous-groupe de Levi standard de G associé à $(n_1, \ldots, n_k)$, est le groupe $\mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \mathrm{GL}_{n_2}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_k}(F)$. Nous notons alors P_L le sous-groupe parabolique standard associé, à savoir que P_L est le produit semi-direct $L \rtimes U$ où U est le radical unipotent de P_L, c'est-à-dire le groupe des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles $n_1, \ldots, n_k$.

Nous noterons alors ι_L^G l'induction parabolique normalisée de (L, P_L) à G.

Si, pour $i = 1, \ldots, k$, π_i est une représentation de $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$, nous notons alors $\pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_k$ la représentation $\iota_L^G(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_k)$ de $\mathrm{GL}_n(F)$.

1.2. Facteurs de transfert. — Pour $x \in G$ on écrit $\det(T - 1 + \mathrm{Ad}_G(x) \,|\, \mathrm{Lie}(G)) = D_G(x)T^n + \ldots$ où D_G est une fonction polynomiale non nulle sur G, avec Ad_G l'action adjointe sur l'algèbre de Lie : pour $x \in G$ et $h \in \mathrm{Lie}(G), \mathrm{Ad}_G(x)(h) = xhx^{-1}$.

On note $G_{\mathrm{reg}} = \{x \in G, D_G(x) \neq 0\}$ l'ensemble des éléments semisimples réguliers de G ; c'est encore l'ensemble des éléments de G qui ont n valeurs propres distinctes dans une clôture algébrique de F.

On définit de la même manière D_H et H_{reg}. On obtient un plongement de H dans G en fixant une base de E^m en tant que F-espace vectoriel. On remarque que $H \cap G_{\mathrm{reg}} \subset H_{\mathrm{reg}}$.

Pour $\gamma, \delta \in H$ soient $c_1, \dots, c_m$ (respectivement $d_1, \dots, d_m$) les valeurs propres de γ (respectivement δ) dans une certaine extension de E.

On pose :

$$r(\gamma, \delta) = \prod_{i,j=1}^{m} (c_i - d_j).$$

Le groupe $\mathrm{Gal}\,(E/F)$ agit sur H. Soit σ un générateur de $\mathrm{Gal}\,(E/F)$. Pour $\gamma \in H$ on définit

$$\tilde{\Delta}(\gamma) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant d-1} r(\sigma^i \gamma, \sigma^j \gamma).$$

Pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$, $\tilde{\Delta}(\gamma) \in E^\times$. On sait qu'il existe $e \in E^\times$ tel que $e\tilde{\Delta}(\gamma) \in F^\times$ pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$.

Pour $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$ on pose alors

$$\Delta(\gamma) = \kappa\left(e\tilde{\Delta}(\gamma)\right)$$

(dépend du choix de e et σ).

On pourra se reporter à [4] pour les propriétés de ces facteurs de transfert (notamment le paragraphe 4).

1.3. Intégrales orbitales. — Soit $\mathrm{d}g$ une mesure de Haar sur G et $\mathrm{d}h$ sur H.

Pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$, puisque γ est semisimple régulier comme élément de G son centralisateur dans G est un tore T_γ et ce tore est contenu dans H. On fixe sur T_γ la mesure de Haar $\mathrm{d}t_\gamma$ telle que le sous-groupe compact maximal de T_γ soit de volume 1.

Soient $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t_\gamma}$ et $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t_\gamma}$ les mesures quotient sur $T_\gamma \backslash G$ et $T_\gamma \backslash H$ respectivement.

On peut maintenant définir les intégrales orbitales.

On note $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ l'espace des fonctions complexes sur G qui sont localement constantes et à support compact. Pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et $\gamma \in G_{\mathrm{reg}}$ on pose

$$\Lambda_\kappa^G(\phi, \gamma) = \int_{T_\gamma \backslash G} \phi(g^{-1}\gamma g)\kappa(g)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t_\gamma}$$

si γ est tel que $\kappa(g) = 1$ pour tout $g \in T_\gamma$ (i.e. $T_\gamma \subset \ker(\kappa)$), et

$$\Lambda_\kappa^G(\phi, \gamma) = 0$$

sinon (observons que si $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$ on a $\kappa(g) = 1$ pour tout $g \in T_\gamma$ car $T_\gamma \subset H$ et κ est trivial sur H).

Pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H)$ et $\gamma \in H_{\mathrm{reg}}$ on pose

$$\Lambda^H(f, \gamma) = \int_{T_\gamma \backslash H} f(h^{-1}\gamma h)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t_\gamma}.$$

On peut alors donner la formulation de l'induction automorphe en termes d'intégrales orbitales.

On dit que $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H)$ *concordent* ou que f est un *transfert* de ϕ si pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$,

$$\Delta(\gamma)|D_G(\gamma)|_F^{\frac{1}{2}}\Lambda_\kappa^G(\phi,\gamma) = |D_H(\gamma)|_E^{\frac{1}{2}}\Lambda^H(f,\gamma)\,.$$

1.4. κ-relèvement. — Soient τ une représentation irréductible de H, π une représentation irréductible de G et A un isomorphisme de $\kappa\pi$ sur π : $A \circ \kappa\pi(g) = \pi(g) \circ A$ pour tout $g \in G$.

Pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, on note $\pi(\phi)$ l'opérateur $v \in V \mapsto \int_G \phi(g)\pi(g)(v)\mathrm{d}g$ où V est l'espace de π (de même pour $\tau(f)$).

Puisque π et τ sont admissibles la trace de ces opérateurs est bien définie.

On dit que π est un *κ-relèvement* de τ s'il existe un nombre complexe non nul $c = c(\tau,\pi,A)$ tel que l'on ait

$$\mathrm{tr}\,(\pi(\phi)\circ A) = c(\tau,\pi,A)\mathrm{tr}\,(\tau(f))$$

dès que $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathrm{reg}})$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H \cap G_{\mathrm{reg}})$ concordent.

La notion de κ-relèvement ne dépend que des classes d'isomorphisme de τ et π.

Notons que Hiraga et Ichino ont montré que l'on peut normaliser les facteurs de transfert de telle manière que la constante c vaille toujours 1 [7, Theorem 1.4].

2. Classifications

On énonce les classifications pour $\mathrm{GL}_n(F)$.

On dispose de la classification de Bernstein-Zelevinsky pour les représentations de carré intégrable et de la classification de Langlands pour les représentations irréductibles.

2.1. Classification de Bernstein-Zelevinsky. — La classification de Bernstein-Zelevinsky ([3]) concerne les représentations de carré intégrable.

Soit δ une représentation irréductible de carré intégrable de $\mathrm{GL}_n(F)$, alors il existe une paire (ρ,k), où k est un diviseur de n et ρ est une représentation irréductible cuspidale unitaire de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F)$, telle que δ est isomorphe à l'unique sous-représentation irréductible $\delta(\rho,k)$ de $\nu^{\frac{k-1}{2}}\rho \times \nu^{\frac{k-1}{2}-1}\rho \times \cdots \times \nu^{-\frac{k-1}{2}}\rho$, où ν est le caractère de $\mathrm{GL}_n(F)$ égal à la composition de la norme $|\ |_F$ avec l'application déterminant et où l'on induit par rapport au parabolique standard associé au sous-groupe de Levi standard $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F)$ (k fois).

L'entier k et la classe d'isomorphisme de ρ sont déterminés par la classe d'isomorphisme de δ.

La représentation $\nu^{\frac{k-1}{2}}\rho \times \nu^{\frac{k-1}{2}-1}\rho \times \cdots \times \nu^{-\frac{k-1}{2}}\rho$ a aussi un unique quotient irréductible, son quotient de Langlands, que nous définissons au prochain paragraphe.