ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 47 fascicule 4 juillet-août 2014

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Miaofen CHEN

Composantes connexes géométriques de la tour des espaces de modules de groupes p-divisibles

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4[e] série, t. 47, 2014, p. 723 à 764

COMPOSANTES CONNEXES GÉOMÉTRIQUES DE LA TOUR DES ESPACES DE MODULES DE GROUPES p-DIVISIBLES

PAR MIAOFEN CHEN

RÉSUMÉ. – Soit $\breve{\mathcal{M}}$ un espace de Rapoport-Zink non ramifié de type EL ou de type PEL unitaire/symplectique. Soit $(\breve{\mathcal{M}}_K)_K$ la tour d'espaces analytiques de Berkovich classifiant les structures de niveau au-dessus de la fibre générique de $\breve{\mathcal{M}}$. On a défini dans [5] un morphisme déterminant $\det_K$ de la tour $(\breve{\mathcal{M}}_K)_K$ vers une tour d'espaces analytiques de Berkovich de dimension 0 associée au cocentre du groupe réductif lié à l'espace $\breve{\mathcal{M}}$. Supposons que les polygones de Newton et de Hodge associés à $\breve{\mathcal{M}}$ ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités. De plus, supposons vérifiée une conjecture sur l'ensemble des composantes connexes de la fibre spéciale réduite de $\breve{\mathcal{M}}$. Alors on montre que les fibres géométriques du morphisme déterminant $\det_K$ sont les composantes connexes géométriques de $\breve{\mathcal{M}}_K$. La conjecture dans l'hypothèse sera confirmée en toute généralité dans un article en préparation de Kisin, Viehmann et l'auteure.

ABSTRACT. – Let $\breve{\mathcal{M}}$ be an unramified Rapoport-Zink space of EL type or unitary/symplectic PEL type. Let $(\breve{\mathcal{M}}_K)_K$ be the tower of Berkovich's analytic spaces classifying the level structures over the generic fiber of $\breve{\mathcal{M}}$. In [5], we have defined a determinant morphism $\det_K$ from the tower $(\breve{\mathcal{M}}_K)_K$ to a tower of Berkovich's analytic spaces of dimension 0 associated to the cocenter of the reductive group related to the space $\breve{\mathcal{M}}$. Suppose that the Newton polygon and Hodge polygon related to $\breve{\mathcal{M}}$ do not touch each other except their end point. And suppose that a conjecture on the set of connected components of the reduced special fiber of $\breve{\mathcal{M}}$ holds. Then we prove that the geometric fibers of the determinant morphism $\det_K$ are the geometrically connected components of $\breve{\mathcal{M}}_K$. The conjecture in the hypothesis will be confirmed in a paper in preparation by Kisin, Viehmann and the author.

Introduction

Soient N un entier strictement positif et $X(N)$ la courbe modulaire sur $\mathbb{Q}$ associée au groupe de congruence

$$\Gamma(N) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; b \equiv c \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ N),\ a \equiv d \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ N) \right\}.$$

Fixons $\zeta_N \in \mathbb{C}$ une racine primitive N-ième de l'unité. Il est alors bien connu qu'on a un isomorphisme $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N) \mid \mathbb{Q})$-équivariant :

$$\pi_0(X(N)_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} \zeta_N^{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}, \tag{1}$$

où $\zeta_N^{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}$ désigne l'ensemble des racines N-ièmes primitives de l'unité. Soit $(E,\eta) \in X(N)(\mathbb{C})$ avec E une courbe elliptique et $\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\sim} E[N]$. Posons $e_1 := \eta((1,0))$ et $e_2 := \eta((0,1))$. Alors l'image de (E,η) via (1) est $\langle e_1, e_2\rangle$ avec $\langle\cdot,\cdot\rangle : E[N] \times E[N] \to \mu_N(\mathbb{C})$ l'accouplement de Weil.

Plus généralement, soient G un groupe réductif défini sur $\mathbb{Q}$ et (G,X) une donnée de Shimura. Notons E le corps reflex de cette donnée. Soit $(\mathrm{Sh}_K(G,X))_K$ la tour de variétés de Shimura associée. Deligne montre dans [11] que si le groupe dérivé G^{der} de G est simplement connexe, il existe une bijection

$$\pi_0(\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} D(\mathbb{Q})^\dagger \backslash D(\mathbb{A}_f)/\det(K), \tag{2}$$

où $D = G/G^{\mathrm{der}}$, $\det : G \to D$ est la projection, et $D(\mathbb{Q})^\dagger := D(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Im}(Z(\mathbb{R}) \overset{\det}{\to} D(\mathbb{R}))$ avec Z le centre de G. Cet isomorphisme est compatible à l'action par correspondances de Hecke.

La cohomologie des variétés de Shimura réalise des cas particuliers de correspondances de Langlands globales entre représentations automorphes de G et représentations ℓ-adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}} \mid E)$. La description précédente des composantes connexes géométriques se traduit de manière cohomologique : le H^0 de la tour de variétés de Shimura réalise des correspondances de Langlands entre représentations automorphes de dimension 1 de G, des caractères de Hecke de D composés avec la projection det, et des caractères de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}} \mid E)$. Les deux sont reliés via la théorie du corps de classe de E.

Dans cet article, nous démontrons un analogue local en des places non archimédiennes de cet isomorphisme. Plus précisément, nous décrivons les composantes connexes géométriques munies de leur action de Galois de certains espaces de modules p-adiques introduits par Rapoport et Zink. Traduit de façon cohomologique cela exprime le fait que le H^0 de ces tours d'espaces de modules p-adiques réalise des correspondances de Langlands locales provenant de la théorie du corps de classe locale via le cocentre du groupe réductif associé à notre espace.

Fixons une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$. Soit $\overline{\mathbb{F}}_p$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ associée. Notons $W = W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$.

On s'intéresse dans cet article aux espaces de Rapoport-Zink non ramifiés $\breve{\mathcal{M}} = \breve{\mathcal{M}}(G,b,\mu)$ de type EL et PEL unitaires ou symplectiques défini à partir d'une donnée de Rapoport-Zink (G,b,μ) satisfaisant certaines conditions, où

- G est un groupe réductif non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ qui est soit une restriction de scalaires d'un groupe linéaire, soit un groupe de similitudes unitaires ou symplectiques,
- b est un élément de $G(W \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ dont on note $\overline{b}$ la classe de σ-conjugaison,
- $\mu : \mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}_p} \to G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ est un cocaractère minuscule de G dont on note $\overline{\mu}$ la classe de conjugaison.

Notons E le corps reflex associé (i.e., le corps de définition de $\overline{\mu}$). Soit $\breve{E}$ le complété de l'extension maximale non ramifiée de E dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ d'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\breve{E}}$. D'après Rapoport et Zink [23], l'espace $\breve{\mathcal{M}}$ est un schéma formel localement formellement de type fini sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ qui représente un certain espace de modules de groupes p-divisibles.

Dans le cas le plus simple (i.e., $G = GL_n$), c'est-à-dire pour un espace de Rapoport-Zink sans structure additionnelle, le schéma formel $\breve{\mathcal{M}} = \breve{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$ représente l'espace de modules défini comme un foncteur

$$\breve{\mathcal{M}} : \mathrm{Nil}_W \to \mathcal{E}\mathrm{ns}$$

où Nil_W est la catégorie des $\mathrm{Spec}(W)$-schémas S tels que p est localement nilpotent sur S. Fixons un groupe p-divisible $\mathbb{X}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Le foncteur $\breve{\mathcal{M}}$ associe à $S \in \mathrm{Nil}_W$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des couples (X, ρ) où

- X est un groupe p-divisible défini sur S ;
- $\rho : \mathbb{X} \times_{\overline{\mathbb{F}}_p} (S \mod p) \to X \times_S (S \mod p)$ est une quasi-isogénie.

L'espace $\breve{\mathcal{M}} = \breve{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$ est muni de plusieurs structures (cf. [23]) :

- une application localement constante $\varkappa : \breve{\mathcal{M}} \to \mathbb{Z}$ qui est définie par la hauteur de la quasi-isogénie à un scalaire près,
- une action à gauche du groupe $J(\mathbb{Q}_p)$, où J est un groupe réductif sur $\mathbb{Q}_p$ défini par b. En effet, J est une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi de G,
- une donnée de descente de $\breve{E}$ à E. Bien que non effective, cette donnée de descente est suffisante pour définir une action de Frobenius sur la cohomologie de ces espaces.

Pour des rappels plus détaillés de la notion d'espace de Rapoport-Zink non ramifié en général, on renvoie à la section 1.1.

Fixons un modèle entier réductif de G et soit $G(\mathbb{Z}_p)$ le sous-groupe compact hyperspécial associé dans $G(\mathbb{Q}_p)$. Soit $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}$ la fibre générique de $\breve{\mathcal{M}}$. C'est un $\breve{E}$-espace analytique de Berkovich au-dessus duquel il existe une tour d'espaces analytiques $(\breve{\mathcal{M}}_K)_K$, où K parcourt les sous-groupes ouverts de $G(\mathbb{Z}_p)$. Le groupe $J(\mathbb{Q}_p)$ agit à gauche sur chaque $\breve{\mathcal{M}}_K$ pour tout K. De plus, la tour $(\breve{\mathcal{M}}_K)_K$ est munie d'une action à droite de $G(\mathbb{Q}_p)$ par correspondances de Hecke. Cette action commute à celle de $J(\mathbb{Q}_p)$.

L'objectif de cet article est d'étudier l'ensemble des composantes connexes géométriques de la tour $(\breve{\mathcal{M}}_K)_K$. Pour cela, on étudie le morphisme déterminant défini dans [5] de cette tour vers une tour d'espaces analytiques de Berkovich de dimension 0 étale sur $\breve{E}$. Le but du morphisme déterminant est appelé la tour d'espaces de Rapoport-Zink toriques que l'on rappelle brièvement.

Soient (G, b, μ) comme précédemment, $D = G/G^{\mathrm{der}}$ l'abélianisé de G, qui est un tore p-adique non ramifié, et $\det : G \to D$ la projection. Considérons la donnée $(D, \det \tilde{\mu})$ induite par la donnée (G, b, μ) via la projection det, où $\tilde{\mu} : \mathbb{G}_m \to G$ est encore un cocaractère de G qui diffère de μ par un cocaractère central. On utilise dans la suite $\tilde{\mu}$ au lieu de μ à cause de la normalisation du Frobenius et de la filtration de Hodge des modules de Dieudonné covariants. À cette nouvelle donnée $(D, \det \tilde{\mu})$, on peut définir de façon ad-hoc une tour d'espaces analytiques de Berkovich

$$(\breve{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K)_{K \subset D(\mathbb{Q}_p)}$$

de dimension 0 étales sur $\breve{E}$, où K parcourt les sous-groupes compacts ouverts de $D(\mathbb{Q}_p)$. On renvoie à la section 1.2 pour plus de détails.

On a défini dans [5] un morphisme de tours d'espaces analytiques de Berkovich

$$(\breve{\mathcal{M}}(G,b,\mu)_K)_K \longrightarrow \big(\breve{\mathcal{M}}(D,\det\tilde{\mu})_{\det K}\big)_K \tag{3}$$

compatible aux structures additionnelles, où K parcourt les sous-groupes ouverts de $G(\mathbb{Z}_p)$.

Soient X^{univ} le groupe p-divisible universel sur $\breve{\mathcal{M}}$ et $\overline{x}$ un point géométrique de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}$. Notons « π_1 » le groupe fondamental profini des espaces analytiques classifiant les revêtements étales finis. On a alors des représentations de monodromie arithmétiques et géométriques

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}\hat{\otimes}\mathbb{C}_p,\overline{x}) \arrow[d] \arrow[dr, "\rho_{\overline{x}}^{\mathrm{geo}}"] & \\
\pi_1(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}},\overline{x}) \arrow[r, "\rho_{\overline{x}}"'] & \mathrm{Aut}(T_p(X_{\overline{x}}^{\mathrm{univ}})) \simeq G(\mathbb{Z}_p).
\end{tikzcd}$$

L'existence de l'application déterminant (3) induit un diagramme

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}\otimes\mathbb{C}_p,\overline{x}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\overline{x}}^{\mathrm{geo}}"'] & \pi_1(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}},\overline{x}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\overline{x}}"] & I_E \arrow[r] \arrow[d, "\chi_{\det\tilde{\mu}}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & G^{\mathrm{der}}(\mathbb{Z}_p) \arrow[r] & G(\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\det"] & D(\mathbb{Z}_p) &
\end{tikzcd} \tag{4}$$

où $\chi_{\det\tilde{\mu}} : I_E \to D(\mathbb{Z}_p)$ est un caractère associé à $\det\tilde{\mu}$ et $I_E = \mathrm{Gal}(\overline{\breve{E}} \mid \breve{E})$ désigne le groupe d'inertie de E.

De Jong a montré dans [10] que $\rho_{\overline{x}}^{\mathrm{geo}}$ est surjectif dans le cas des espaces de Lubin-Tate. Strauch a redémontré ce résultat par une autre méthode dans [28]. On généralise cela aux espaces de Rapoport-Zink non ramifiés précédents sous la conjecture suivante.

CONJECTURE (6.1.1). – *Soit $\breve{\mathcal{M}} = \breve{\mathcal{M}}(G,b,\mu)$ un espace de Rapoport-Zink non ramifié simple de type EL ou PEL symplectique/unitaire. Supposons que les polygones de Hodge et de Newton associés à la donnée de Rapoport-Zink ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités (i.e., (b,μ) est HN-irréductible, cf. définition 5.0.4). Alors,*

$$\varkappa : \pi_0(\breve{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\,\varkappa.$$

La conjecture est connue dans des cas particuliers. Dans le cas des espaces de Lubin-Tate, elle est vraie pour des raisons évidentes. Lorsque le groupe G est déployé (i.e., $G = \mathrm{GL}_n$ pour le cas EL et $G = \mathrm{GSp}_{2n}$ pour le cas PEL symplectique), elle a été démontrée par Viehmann ([32], [31]). Dans le cas PEL unitaire basique en signature $(1, n-1)$ avec une extension quadratique de $\mathbb{Q}_p$, elle a été démontrée par Vollaard ([33]). Dans un travail récent en préparation de Kisin, Viehmann et l'auteure [6], cette conjecture sera confirmée en toute généralité.

Remarquons enfin que cette conjecture est un problème d'espaces de modules en caractéristique positive : $\pi_0(\breve{\mathcal{M}}) = \pi_0(\breve{\mathcal{M}}_{\mathrm{red}})$ où $\breve{\mathcal{M}}_{\mathrm{red}}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-schéma réduit localement de type fini.

Voici donc les résultats principaux de cet article.