ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 57 fascicule 4 juillet-août 2024

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Vincent SÉCHERRE

Représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_r(D)$ *distinguées par une involution intérieure*

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
Email : annales@ens.fr

Édition et abonnements / *Publication and subscriptions*

Société Mathématique de France
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Tél. : (33) 04 91 26 74 64. Fax : (33) 04 91 41 17 51
Email : abonnements@smf.emath.fr

Tarifs

Abonnement électronique : 480 euros.
Abonnement avec supplément papier :
Europe : 675 €. Hors Europe : 759 € ($ 985). Vente au numéro : 77 €.

ISSN 0012-9593 (print) 1873-2151 (electronic)

Directeur de la publication : Fabien Durand
Périodicité : 6 nos / an

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4 e série, t. 57, 2024, p. 961 à 1038

REPRÉSENTATIONS CUSPIDALES DE $\mathrm{GL}_r(D)$ DISTINGUÉES PAR UNE INVOLUTION INTÉRIEURE

PAR VINCENT SÉCHERRE

À la mémoire de Colin Bushnell

RÉSUMÉ. – Soit un entier $n \geqslant 1$, soit F un corps localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle $p \neq 2$ et soit G une forme intérieure de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$. C'est un groupe de la forme $\mathrm{GL}_r(D)$ pour un entier $r \geqslant 1$ et une F-algèbre à division D de degré réduit d tel que $rd = 2n$. Soit K une extension quadratique de F dans l'algèbre des matrices de taille r à coefficients dans D, et soit H son centralisateur dans G. Nous étudions les représentations cuspidales autoduales complexes de G et leur distinction par H du point de vue de la théorie des types. Si π est une telle représentation et si ϕ est son paramètre de Langlands, nous calculons la valeur en $1/2$ du facteur epsilon de la restriction de ϕ au groupe de Weil-Deligne de K, notée $\mathsf{e}_K(\phi)$. Lorsque F est de caractéristique nulle, nous en déduisons que π est distinguée par H si et seulement si ϕ est de parité symplectique et $\mathsf{e}_K(\phi) = (-1)^r$. Ceci prouve dans ce cas une conjecture de Prasad et Takloo-Bighash.

ABSTRACT. – Let n be a positive integer, F a non-Archimedean locally compact field of residue characteristic $p \neq 2$ and G an inner form of $\mathrm{GL}_{2n}(F)$. This is a group of the form $\mathrm{GL}_r(D)$ for a positive integer r and division F-algebra D of reduced degree d such that $rd = 2n$. Let K be a quadratic extension of F in the algebra of matrices of size r with coefficients in D, and H be its centralizer in G. We study selfdual cuspidal complex representations of G and their distinction by H from the point of view of type theory. Given such a representation π, we compute the value at $1/2$ of the epsilon factor of the restriction of the Langlands parameter ϕ of π to the Weil-Deligne group of K, denoted $\mathsf{e}_K(\phi)$. When F has characteristic 0, we deduce that π is H-distinguished if and only if ϕ is symplectic and $\mathsf{e}_K(\phi) = (-1)^r$. This proves in this case a conjecture by Prasad-Takloo-Bighash.

1. Introduction

1.1.

Soit un entier $n \geqslant 1$, soit F un corps localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et A une F-algèbre centrale simple de degré réduit $2n$. C'est une algèbre de la forme $\mathsf{M}_r(D)$ pour un entier $r \geqslant 1$ et une F-algèbre à division D de degré

doi:10.24033/asens.2585

réduit $d \geqslant 1$ tels que $rd = 2n$. Notons $G = A^\times = \mathrm{GL}_r(D)$ le groupe des éléments inversibles de A. Un tel groupe est une forme intérieure de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$, et la théorie des représentations (lisses, complexes) de G est liée à celle de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands [48, 59, 29, 4], qui est une bijection entre classes d'isomorphisme de représentations essentiellement de carré intégrable de G et $\mathrm{GL}_{2n}(F)$, caractérisée par une identité de caractères sur les classes de conjugaison elliptiques régulières.

Soit K une extension quadratique de F incluse dans A, soit H son centralisateur dans G et soit μ un caractère de $K^\times$. On note Nrd_H la norme réduite de H dans $K^\times$. Une représentation irréductible π de G sur un espace vectoriel (complexe) V est dite μ-distinguée si V admet une forme linéaire non nulle $\mathscr{L}$ telle que :

$$\mathscr{L}(\pi(h)v) = \mu(\mathrm{Nrd}_H(h)) \cdot v, \quad h \in H, \quad v \in V,$$

c'est-à-dire si l'espace $\mathrm{Hom}_H(\pi, \mu \circ \mathrm{Nrd}_H)$ est non nul. Dans [58] Prasad et Takloo-Bighash ont formulé la conjecture suivante. On verra μ indifféremment comme un caractère de $K^\times$ ou du groupe de Weil de K *via* l'homomorphisme de réciprocité de la théorie du corps de classes local.

CONJECTURE 1.1. – *Soit π une représentation irréductible de G dont le transfert à $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ soit générique. Supposons que la restriction de μ^n à $F^\times$ soit égale au caractère central de π. Notons ϕ le paramètre de Langlands de π et ϕ_K sa restriction au groupe de Weil-Deligne de K.*

1. *Si la représentation π est μ-distinguée, alors :*
   (a) *le paramètre de Langlands ϕ est à valeurs dans le groupe* $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{C})$ *des similitudes symplectiques et son facteur de similitude est égal à la restriction de μ à $F^\times$,*
   (b) *la valeur en $1/2$ du facteur epsilon de $\phi_K \cdot \mu^{-1}$ est égale à $(-1)^r \mu(-1)^n$.*
2. *Si la représentation π est essentiellement de carré intégrable, alors elle est μ-distinguée si et seulement si les conditions* (1.a) *et* (1.b) *sont satisfaites.*

Expliquons ce que signifie la condition de généricité portant sur π. D'après [78, 74, 6], il y a des entiers $r_1, \dots, r_k \geqslant 1$ et des représentations essentiellement de carré intégrable $\delta_1, \dots, \delta_k$ de $\mathrm{GL}_{r_1}(D), \dots, \mathrm{GL}_{r_k}(D)$ tels que π soit isomorphe à l'unique quotient irréductible de l'induite parabolique normalisée de $\delta_1 \otimes \cdots \otimes \delta_k$ prise par rapport au sous-groupe parabolique triangulaire supérieur par blocs. Chaque δ_i a un transfert de Jacquet-Langlands noté σ_i, qui est une représentation essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{r_i d}(F)$. L'induite parabolique normalisée de $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_k$ admet un unique quotient irréductible, qui est le transfert de π, et ce transfert est générique si cette induite est irréductible.

1.2.

Cette conjecture est inspirée de résultats dus à Tunnel [76] et à Saito [60] dans le cas où n et d sont égaux à 1, et où F est soit de caractéristique nulle, soit de caractéristique p impaire. Dans le cas où μ est trivial, Guo [41] prouve que, si F est de caractéristique nulle et si $d \leqslant 2$, l'espace $\mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbb{C})$ est de dimension au plus 1 pour toute représentation irréductible π de G et que, si cette dimension est non nulle, c'est-à-dire si π est H-distinguée, alors π est autoduale. Dans [58], Prasad et Takloo-Bighash prouvent leur conjecture lorsque $n = 2$. Leur preuve repose en partie sur des résultats de Gan-Takeda [35], qui supposent que F est de caractéristique nulle. Il y a eu récemment plusieurs résultats en direction de la preuve de la conjecture 1.1.

Quand μ est trivial et F de caractéristique nulle, Feigon-Martin-Whitehouse [31] prouvent la conjecture 1.1(1) pour les représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$.

Chommaux [26] prouve la conjecture 1.1(2) lorsque π est la représentation de Steinberg de G tordue par un caractère et F est de caractéristique différente de 2. Puis Chommaux et Matringe [27] prouvent la même conjecture dans le cas où π est une représentation cuspidale de niveau 0 de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ et où $p \neq 2$.

Broussous et Matringe [13] étendent le théorème de multiplicité 1 de Guo au cas où l'entier d est quelconque et F est de caractéristique différente de 2. Ils étendent aussi au cas d'une forme intérieure quelconque le théorème d'autodualité de Guo ; leur argument repose sur des résultats ([41, 49]) supposant que F est de caractéristique nulle, mais on trouve dans [27] un argument valable dès que F est de caractéristique différente de 2.

Dans le cas où μ est trivial et F de caractéristique différente de 2, Suzuki [72] étend la conjecture 1.1(1) à toutes les représentations irréductibles, sans hypothèse de généricité, et ramène la preuve de cette conjecture au cas des représentations essentiellement de carré intégrable.

Enfin, dans le cas où μ est trivial et F de caractéristique nulle, Xue [77] prouve d'une part la conjecture 1.1(1), d'autre part la conjecture 1.1(2) dans les cas suivants : (i) pour les représentations cuspidales dont le transfert de Jacquet-Langlands à $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ est cuspidal, (ii) pour toutes les représentations cuspidales si $d \leqslant 2$; et Suzuki et Xue [73] montrent que la preuve de la conjecture 1.1(2) se ramène au cas des représentations cuspidales.

1.3.

Dorénavant, nous supposerons que le caractère μ de la conjecture 1.1 est trivial. Dans cet article, nous prouvons le théorème suivant (voir le théorème 9.5).

THÉORÈME 1.2. – *Supposons que $p \neq 2$, et que la condition (1.a) de la conjecture 1.1 soit vérifiée par toute représentation cuspidale H-distinguée de G. Alors la conjecture 1.1(2) est vraie pour toute représentation cuspidale de G.*

Dans le cas où F est de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle $p \neq 2$, on en déduit grâce à [77] le résultat suivant (voir le corollaire 9.6).

COROLLAIRE 1.3. – *Supposons que F soit de caractéristique nulle et que $p \neq 2$. Alors la conjecture 1.1(2) est vraie pour toute représentation cuspidale de G.*

Par conséquent, compte tenu des résultats présentés dans le paragraphe précédent, le corollaire 1.3 complète la preuve de la conjecture 1.1 dans le cas où F est de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle $p \neq 2$ (et où le caractère μ est trivial).

Notre approche, complètement différente de celle de [77], repose sur la description des représentations cuspidales des formes intérieures de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ par la théorie des types. On renvoie au paragraphe 1.5 pour une discussion de l'hypothèse «$p \neq 2$» dans ce théorème et son corollaire.