BULLETIN DE LA S. M. F.

P. COLLIN

R. KRUST

Le problème de Dirichlet pour l'équation des surfaces minimales sur des domaines non bornés

Bulletin de la S. M. F., tome 119, n° 4 (1991), p. 443-462

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_4_443_0>

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 443–462.

LE PROBLÈME DE DIRICHLET POUR L'ÉQUATION DES SURFACES MINIMALES SUR DES DOMAINES NON BORNÉS

PAR

P. COLLIN ET R. KRUST (*)

RÉSUMÉ. — Cet article traite du problème de Dirichlet associé à l'équation des surfaces minimales sur un domaine non borné du plan. Le théorème principal fournit, dans le cas plus général de l'équation des surfaces à courbure moyenne prescrite, une estimation de la différence de deux solutions distinctes au voisinage de l'infini. Il en est déduit d'une part un théorème général d'unicité des solutions, et d'autre part un principe du maximum à l'infini. Une étude plus spécifique est menée dans le cas de l'équation des surfaces minimales sur des domaines particuliers tels que la bande ou le demi-plan.

ABSTRACT. — This paper deals with the Dirichlet problem for the minimal surface equation in an unbounded domain of the plane. In the more general case of the prescribed mean curvature equation, the main theorem gives an estimate for the difference between two solutions in a neighbourhood of infinity. A general theorem of unicity of solution, and a maximum principle at infinity are deduced from it. A more specific study is done in the case of the minimal surface equation on some particular domains such as the strip or the half-plane.

0. Introduction

Dans cet article, nous étudions l'équation des surfaces minimales :

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0 \tag{E}$$

sur des domaines Ω non bornés. Le problème de Dirichlet consiste à déterminer les solutions qui prennent des valeurs données sur $\partial\Omega$. Nous

(*) Texte reçu le 27 avril 1989, révisé le 16 avril 1991.
P. COLLIN, 22 av. Pierre Dupont, 95400 Villiers-Le-Bel.
R. KRUST, 15 rue des Martyrs, 93130 Noisy-Le-Sec.
Classification AMS : 53 A 10

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1991/443/$ 5.00

considérerons pour notre part plus particulièrement le problème de l'unicité.

Lorsque Ω est l'extérieur d'un disque, BERS [9] a montré que le problème admet au plus une solution bornée. Le même cas a ensuite été considéré par H. ROSENBERG et R. LANGEVIN [7] qui ont montré un principe du maximum à l'infini permettant de classifier les solutions, puis par l'un d'entre nous [5] qui a étudié certains problèmes d'existence.

Dans [11], R. SA EARP et H. ROSENBERG étudient le problème lorsque Ω est convexe. Ils obtiennent en particulier d'intéressants résultats d'existence et un principe du maximum qui seront rappelés dans la troisième partie.

Notre papier trouve son origine dans le problème de l'hélicoïde : il s'agit de déterminer les solutions du problème de Dirichlet sur une bande, pour des données linéaires au bord. Ce problème a été abordé par H. ROSENBERG, R. LANGEVIN et G. LEVITT dans [6] où ils ont prouvé, sous certaines hypothèses, que la seule solution est une portion d'hélicoïde. Dans la première partie de cet article, nous démontrons ce résultat en toute généralité.

Dans une deuxième partie, nous prouverons notre principal théorème qui étudie le comportement relatif à l'infini de deux solutions distinctes (ce théorème s'appliquera en fait à une classe plus vaste d'équations, celle des surfaces à courbure moyenne prescrite). Après la rédaction de cet article, nous avons eu connaissance d'un travail de J.F. HWANG [3] dans lequel il obtient des résultats de même nature (l'estimation obtenue ici est cependant un peu plus précise).

Enfin, nous utiliserons ces résultats dans la troisième partie, d'une part pour généraliser le théorème de Bers et le principe du maximum de Langevin-Rosenberg cités précédemment au cas d'un domaine quelconque; d'autre part, pour résoudre le problème de Dirichlet dans le cas d'un domaine convexe, pour certaines données au bord.

Nous remercions le professeur H. ROSENBERG pour l'aide et les conseils qu'il nous a apportés au cours de ce travail.

1. L'hélicoïde

Soit B la bande $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\,;\ x_1 = 0,\ 0 < x_3 < a\}$. Soient L_0 et L_1 deux droites de $\mathbb{R}^3$ appartenant respectivement aux plans $x_3 = 0$ et $x_3 = a$.

Dans cette première partie, nous déterminerons toutes les surfaces minimales bordées par ces deux droites, et dont l'intérieur est un graphe au dessus de B.

En faisant tourner régulièrement une droite le long d'un axe perpendiculaire à L_0 et L_1, il est toujours possible de construire un hélicoïde — ou un plan — solution de ce problème. C'est en fait la seule solution.

THÉORÈME 1. — *Soit M_0 une surface minimale bordée par deux droites L_0 et L_1, dont l'intérieur est un graphe au-dessus de la bande $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ;\ x_1 = 0,\ 0 < x_3 < a\}$. Alors M_0 est une partie d'hélicoïde ou de plan.*

En usant du principe de réflexion, on construit, par des réflexions successives par rapport aux droites L_0 et L_1, une surface minimale M complète et simplement connexe. Sa structure conforme est donc celle du plan ou du disque de Poincaré. Nous allons voir que dans le premier cas, M est un hélicoïde ou un plan, et que le second cas ne se produit pas.

$A - M$ **est conformément un plan.**

On suppose qu'il existe un paramétrage conforme de M par le plan complexe $\Psi : \mathbb{C} \to M$. Du fait de l'hypothèse de graphe, Ψ peut être choisie de façon à ce que, sur M_0, la normale pointe dans le demi-espace $\{x_1 \geq 0\}$.

Par construction, les droites L_0 et L_1 sont des axes de symétrie de M. Elles se relèvent donc par Ψ en deux droites $D_0 = \Psi^{-1}(L_0)$ et $D_1 = \Psi^{-1}(L_1)$ (la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à L_0 par exemple, induit par Ψ^{-1} un difféomorphisme conforme de $\mathbb{C}$ ayant $D_0 = \Psi^{-1}(L_0)$ pour ensemble de points fixes). Il est alors clair que $\Psi^{-1}(M_0)$ est la bande de $\mathbb{C}$ bordée par D_0 et D_1.

Soit (g, ω) la représentation de Weierstrass de Ψ. Rappelons que $g(z)$, qui est la projection stéréographique de la normale à M au point $\Psi(z)$ sur le plan $(x_1, x_2) \approx \mathbb{C}$, est une fonction méromorphe et que ω est une forme différentielle holomorphe. Les fonctions coordonnées de M sont alors données par :

$$\begin{cases} x_1(z) = \operatorname{Re} \displaystyle\int^z \tfrac{1}{2}(1 - g^2)\,\omega, \\ x_2(z) = \operatorname{Re} \displaystyle\int^z \tfrac{1}{2} i(1 + g^2)\,\omega, \\ x_3(z) = \operatorname{Re} \displaystyle\int^z g\,\omega, \end{cases}$$

la métrique étant donnée par $\mathrm{d}s = \frac{1}{2}(1 + |g|^2)|\omega|$.

Compte tenu de l'hypothèse de graphe et de l'orientation choisie, on a $\operatorname{Re} g > 0$ sur $M_0 \backslash \partial M_0$. De plus, g est à valeur dans $\mathbb{C} - \{0\}$. En effet, si g admet un pôle ou un zéro sur M_0 — c'est-à-dire si la normale est parallèle à l'axe Ox_3 — c'est nécessairement sur L_0 ou L_1. En considérant le plan $x_3 = 0$ (ou $x_3 = a$), on constate en appliquant le principe du maximum à bord que cela contredit l'hypothèse de graphe.

Le long de L_j ($j = 0, 1$), la normale à M est orthogonale à L_j. Donc $g(D_j)$ est inclus dans une demi-droite Δ_j d'origine O et d'argument θ_j (où $\theta_j \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$). L'argument θ_j, qui est aussi l'angle — orienté par l'axe Ox_3 — formé par l'axe Ox_2 et la droite L_j, est déterminé de manière unique, sauf si L_j est parallèle à Ox_1. Dans ce dernier cas, deux valeurs sont possibles : $\theta_j = \pm\frac{1}{2}\pi$ (Fig. 1 et 2).

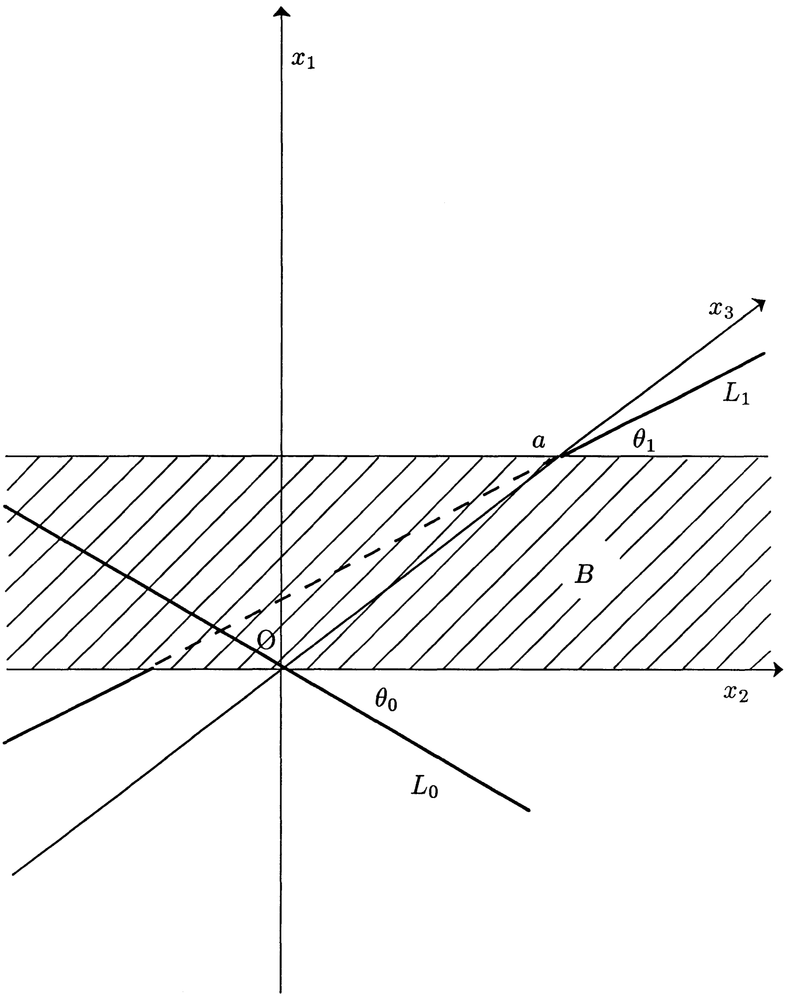

Figure 1.