Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

OBSTRUCTIONS DE BRAUER-MANIN ENTIÈRES SUR LES ESPACES HOMOGÈNES À STABILISATEURS FINIS NILPOTENTS

Cyril Demarche

Tome 145
Fascicule 2

2017

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 225-236

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 145, juin 2017

Diffusion

Maison de la SMF - Case 916 - Luminy - 13288 Marseille Cedex 9 - France
christian.smf@cirm-math.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
bullsmf@ihp.fr • smf.emath.fr

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. Math. France
145 (2), 2017, p. 225-236

OBSTRUCTIONS DE BRAUER-MANIN ENTIÈRES SUR LES ESPACES HOMOGÈNES À STABILISATEURS FINIS NILPOTENTS

PAR CYRIL DEMARCHE

RÉSUMÉ. — Soit k un corps de nombres. On construit des espaces homogènes de $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateurs finis nilpotents non commutatifs pour lesquels l'obstruction de Brauer-Manin est insuffisante pour expliquer le défaut d'approximation forte (resp. le défaut du principe de Hasse entier).

ABSTRACT (*Integral Brauer-Manin obstructions on homogeneous spaces with finite nilpotent stabilizers*). — Let k be a number field. We construct homogeneous spaces of $\mathrm{SL}_{n,k}$ with finite nilpotent non-abelian stabilizers for which the Brauer-Manin obstruction does not explain the failure of strong approximation (resp. the failure of the integral Hasse principle).

Texte reçu le 22 juillet 2014, modifié le 18 mai 2016, accepté le 18 mai 2016.

CYRIL DEMARCHE, Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, UMR 7586, CNRS, Univ Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, F-75005, Paris, France - Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, CNRS, PSL Research University, 75005 Paris, France • *E-mail :* `cyril.demarche@imj-prg.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 11E72; 14G05, 14M17, 20G30.

Mots clefs. — Principe de Hasse, approximation forte, obstruction de Brauer-Manin, espaces homogènes.

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-12-BL01-0005.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2017/225/$ 5.00

doi:10.24033/bsmf.2735

0. Introduction

Si k est un corps de nombres et H est un k-groupe algébrique fini, il serait très intéressant de connaître pour quels ensembles finis S de places de k l'application naturelle entre ensembles pointés de cohomologie galoisienne

$$H^1(k,H) \to \prod_{v\in S} H^1(k_v,H)$$

est surjective. Cette question (parfois appelée problème de Grunwald), motivée par exemple par le problème inverse de Galois et par celui de l'existence de corps de nombres à ramification prescrite, est intimement liée à l'étude de l'approximation faible sur l'espace homogène $\mathrm{SL}_{n,k}/H$ défini par une représentation fidèle $H \to \mathrm{SL}_{n,k}$ (voir par exemple [10]), et plus précisément à l'étude de l'obstruction de Brauer-Manin à ladite approximation faible sur cette variété. Ce problème est encore loin d'être résolu (voir par exemple [10], [5] et [12]), tout comme son analogue concernant le principe de Hasse sur des espaces homogènes à stabilisateurs géométriques finis. Les deux questions ouvertes principales concernant ce problème sont sans doute les suivantes :

- Étant donné un espace homogène X sur k du groupe $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateurs géométriques finis, la non-vacuité de l'ensemble de Brauer-Manin $(\prod_v X(k_v))^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$ (voir [15], 5.2) implique-t-elle l'existence d'un point rationnel sur X ?
- Et si $X(k) \neq \emptyset$, l'ensemble des points rationnels $X(k)$ est-il dense (pour la topologie produit) dans l'ensemble de Brauer-Manin $(\prod_v X(k_v))^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$?

Dans cette note, on s'intéresse aux versions entières de ces questions, à savoir le principe de Hasse entier et l'approximation forte sur les espaces homogènes du groupe $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateurs finis sur un corps de nombres k.

On montre que pour de telles variétés algébriques, si les stabilisateurs sont des p-groupes constants non commutatifs et si le corps de base contient suffisamment de racines de l'unité, l'obstruction de Brauer-Manin (même en tenant compte de la partie dite « transcendante » du groupe de Brauer) ne permet pas d'expliquer le défaut d'approximation forte (théorème 2.1) ou du principe de Hasse entier (corollaire 4.1). Autrement dit, concernant l'approximation forte, pour tout p-groupe fini non commutatif H et tout morphisme injectif de groupes $H \to \mathrm{SL}_{n,k}$, l'espace homogène quotient $X := \mathrm{SL}_{n,k}/H$ possède des points adéliques vérifiant les conditions de Brauer-Manin qui ne peuvent être approximés pour la topologie adélique par des points rationnels de X (hors d'un ensemble fini fixé de places de k) ; concernant le principe de Hasse entier, sous les mêmes hypothèses, il existe un modèle entier $\mathcal{X}$ de X, fidèlement plat séparé de type fini sur un anneau d'entiers de k, tel que $\mathcal{X}$ possède des points entiers localement partout vérifiant les conditions de Brauer-Manin, mais tel que $\mathcal{X}$ n'admette cependant pas de point entier global.

En particulier, cela montre combien l'arithmétique des espaces homogènes à stabilisateurs finis diffère de celle des espaces homogènes à stabilisateurs connexes ou abéliens, où au contraire l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction à l'approximation forte et au principe de Hasse entier (voir par exemple [3] ou [1]).

Ces réponses négatives à la suffisance des obstructions de Brauer-Manin entières ne permettent toutefois pas d'apporter une réponse aux questions analogues mentionnées plus haut concernant le principe de Hasse rationnel et l'approximation faible, qui demeurent donc toujours largement ouvertes.

Remerciements. — Je remercie vivement Jean-Louis Colliot-Thélène, Yonatan Harpaz et Giancarlo Lucchini Arteche pour leurs précieux commentaires et leur intérêt pour ce texte. Je remercie tout particulièrement David Harari et Gregorio Baldi de m'avoir signalé une erreur dans une version précédente de cet article. Je remercie enfin le rapporteur pour ses suggestions, notamment à propos de la proposition 1.1.

Quelques notations. — Dans tout ce texte, k est un corps de caractéristique nulle, $\overline{k}$ une clôture algébrique fixée de k, Γ_k désigne le groupe de Galois de l'extension $\overline{k}/k$. Dans toute cette note, la cohomologie utilisée est la cohomologie étale.

Si k est un corps de nombres, on note Ω_k l'ensemble des places de k ; si $v \in \Omega_k$, on note k_v le complété de k en v et $\mathcal{O}_v$ son anneau des entiers (par convention, $\mathcal{O}_v := k_v$ si v est une place non archimédienne) ; si S est un ensemble fini de places de k, on note $\mathcal{O}_{k,S}$ l'anneau des S-entiers de k et $\mathbf{A}_k^S$ l'anneau des adèles hors de S.

Si A est un groupe topologique, on note $A^D := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ le groupe des homomorphismes continus de A vers $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Si X est une k-variété, on note $\mathrm{Br}(X) := H^2(X, \mathbf{G}_m)$ le groupe de Brauer de X. On renvoie à [15] pour la définition de l'accouplement de Brauer-Manin $X(\mathbf{A}_k) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et du sous-ensemble $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)$, ainsi qu'à la première section de [3] pour les généralités sur l'approximation forte et l'obstruction de Brauer-Manin entière.

1. Groupe de Brauer

Dans cette section, on montre le résultat simple suivant, qui généralise les résultats classiques sur la partie algébrique du groupe de Brauer dans un cas particulier. Si k est un corps et H un k-groupe algébrique, on note $\mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m)$ le groupe des extensions centrales de k-groupes algébriques de H par $\mathbf{G}_m$.

PROPOSITION 1.1. — *Soit k un corps de caractéristique nulle et G un k-groupe algébrique semi-simple simplement connexe. Soit H un k-sous-groupe constant*