THÉORIE DE HODGE
ET GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE COMPLEXE

Claire Voisin

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
91944 les Ulis cedex A
France
www.edpsciences.com

Tarifs 2002

Vente au numéro : 69 € ($ 78)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 1284-6090

ISBN 2-85629-129-5

Directeur de la publication : Michel WALDSCHMIDT

COURS SPÉCIALISÉS 10

THÉORIE DE HODGE
ET GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE COMPLEXE

Claire Voisin

Société Mathématique de France 2002
Publié avec le concours de l'Institut Universitaire de France

TABLE DES MATIÈRES

Partie II. La décomposition de Hodge

Partie III. Variations de structure de Hodge

Partie IV. Cycles et classes de cycles

INTRODUCTION

Variétés kählériennes et variétés projectives. — Ce livre est constitué de sept parties. Le but des quatre premières parties est d'expliquer l'existence de structures particulières sur la cohomologie des variétés kählériennes (la décomposition de Hodge et la décomposition de Lefschetz) et d'en montrer les premières propriétés et conséquences. Elles constituent une introduction à la géométrie kählérienne et à la théorie de Hodge. Les trois dernières parties ont pour but de présenter des résultats plus avancés en théorie de Hodge. Elles sont consacrées aux liens entre la théorie de Hodge, la topologie et l'étude des cycles algébriques sur les variétés projectives complexes lisses.

Les variétés projectives complexes lisses sont en effet des exemples particuliers de variétés kählériennes compactes. Une variété kählérienne est une variété complexe munie d'une métrique hermitienne dont la partie imaginaire, qui est une 2-forme de type $(1,1)$ relativement à la structure complexe, est fermée. Cette 2-forme est appelée la forme de Kähler de la métrique kählérienne. Comme l'espace projectif complexe est une variété kählérienne (on dispose par exemple de la métrique de Fubini-Study), les sous-variétés complexes de l'espace projectif sont aussi kählériennes grâce à la métrique induite. On peut même dire précisément quelle est la place occupée par les variétés projectives complexes parmi les variétés kählériennes grâce au théorème de Kodaira :

Théorème 1. — *Une variété complexe compacte admet un plongement holomorphe dans un espace projectif complexe si et seulement si elle admet une métrique kählérienne dont la forme de Kähler est de classe entière.*

Dans les quatre premières parties de ce texte, nous nous intéresserons essentiellement à la classe des variétés kählériennes, sans privilégier les variétés projectives. La raison est que notre but ici est d'établir l'existence de la décomposition de Hodge et de la décomposition de Lefschetz sur la cohomologie d'une telle variété, et qu'il n'est pas besoin pour cela de supposer que la classe de Kähler est entière. Néanmoins la décomposition de Lefschetz ne sera définie sur la cohomologie rationnelle que dans le cas projectif, et c'est déjà une raison importante pour se limiter ultérieurement au cas des variétés projectives. En effet, nous dégagerons dans ce texte la notion de structure de Hodge polarisée, et de domaine des périodes polarisées paramétrant les structures de Hodge polarisées. Ces domaines de périodes polarisées possèdent des propriétés de courbure que n'ont pas les domaines de périodes non polarisées. Or la décomposition de Lefschetz, lorsqu'elle est définie sur la cohomologie rationnelle ou entière permet justement de scinder la cohomologie d'une variété kählérienne en une somme directe de structures de Hodge polarisées.

Une autre raison de se limiter dans les applications de la théorie de Hodge aux variétés projectives réside dans le fait qu'une variété kählérienne ne possède pas en général de sous-variétés complexes, alors que les variétés projectives en contiennent beaucoup, à tel point qu'il est conjecturé actuellement, comme une vaste généralisation de la conjecture de Hodge, que les structures de Hodge sur une variété projective X sont gouvernées par, et déterminent en un sens à préciser, la géométrie des sous-variétés algébriques de X, et plus précisément les groupes de Chow de X.

La décomposition de Hodge. — Si X est une variété complexe, l'espace tangent de X en chaque point x est en particulier muni d'une structure complexe J_x. La donnée de cette structure complexe en chaque point est ce qu'on appelle la structure presque complexe sous-jacente. La donnée de J_x fournit une décomposition

$$T_{X,x} \otimes \mathbb{C} = T_{X,x}^{1,0} \oplus T_{X,x}^{0,1}, \tag{0.1}$$

où $T_{X,x}^{0,1}$ est l'espace vectoriel des vecteurs tangents complexifiés $u \in T_{X,x}$ tels que $J_x u = -iu$. Du point de vue de la structure complexe, c'est-à-dire de la donnée locale de coordonnées holomorphes, les champs de vecteurs de type $(0,1)$ sont ceux qui annulent les fonctions holomorphes.

La décomposition (0.1) induit une décomposition semblable sur les fibrés de formes différentielles complexes

$$\Omega_{X,\mathbb{C}}^k := \Omega_{X,\mathbb{R}}^k \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \Omega_X^{p,q}, \tag{0.2}$$

où

$$\Omega_X^{p,q} \cong \bigwedge^p \Omega_X^{1,0} \otimes \bigwedge^q \Omega_X^{0,1}$$

et

$$\Omega_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \Omega_X^{1,0} \oplus \Omega_X^{0,1}$$

est la décomposition duale de (0.1). La décomposition (0.2) a la propriété de symétrie de Hodge

$$\overline{\Omega_X^{p,q}} = \Omega_X^{q,p},$$

où la conjugaison complexe agit de façon naturelle sur $\Omega_{X,\mathbb{C}}^k = \Omega_{X,\mathbb{R}}^k \otimes \mathbb{C}$.