

Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 116
Nouvelle série

**FAISCEAUX PERVERS DES
CYCLES ÉVANESCENTS DES
VARIÉTÉS DE DRINFELD ET
GROUPES DE COHOMOLOGIE
DU MODÈLE DE DELIGNE-CARAYOL**

2 0 0 9

Pascal BOYER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Comité de rédaction

Jean BARGE	Charles FAVRE
Emmanuel BREUILLARD	Daniel HUYBRECHTS
Gérard BESSON	Yves LE JAN
Antoine CHAMBERT-LOIR	Laure SAINT-RAYMOND
Jean-François DAT	Wilhem SCHLAG
Raphaël KRIKORIAN (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 38 € (\$57)
Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € (\$435)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2009

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X
ISBN 978-2-85629-272-3

Directrice de la publication : Aline BONAMI

**FAISCEAUX PERVERS DES CYCLES
ÉVANESCENTS DES VARIÉTÉS DE
DRINFELD ET GROUPE DE
COHOMOLOGIE DU MODÈLE DE
DELIGNE-CARAYOL**

Pascal Boyer

Société Mathématique de France 2009

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Pascal Boyer

E-mail : `boyer@math.jussieu.fr`

Institut de mathématiques de Jussieu, UMR 7586, Université Paris 6,
175 rue du Chevaleret 75013 Paris.

Url : `http://www.institut.math.jussieu.fr/~boyer/`

Classification mathématique par sujets (2000). – 14G22, 14G35, 11G09, 11G35, 11R39, 14L05, 11G45, 11Fxx.

Mots-clefs. – Variétés de Drinfeld, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, filtration de monodromie, conjecture de monodromie-poids, variété de Shimura.

FAISCEAUX PERVERS DES CYCLES ÉVANESCENTS DES VARIÉTÉS DE DRINFELD ET GROUPES DE COHOMOLOGIE DU MODÈLE DE DELIGNE-CARAYOL

Pascal Boyer

Résumé. – Dans la première moitié du livre, on traduit, dans la situation géométrique des variétés de Drinfeld, c'est-à-dire le cas des corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, les principaux résultats du livre de Michael Harris et Richard Taylor [16] concernant certaines variétés de Shimura définies sur des corps de nombres. On explicite notamment la restriction aux strates ouvertes des faisceaux des cycles évanescents en fonction de certains systèmes locaux dits d'Harris-Taylor dont on calcule la somme alternée des groupes de cohomologie à supports compacts. Dans la deuxième moitié du livre, on décrit les gradués de la filtration de monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents ainsi que la suite spectrale correspondante. D'après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, on obtient alors une description de la filtration de monodromie-locale du modèle de Deligne-Carayol.

Abstract (Perverse sheaf of vanishing cycles of Drinfeld varieties and cohomology group of Deligne-Carayol model)

In the first half of the book, we translate in the geometric situation of Drinfeld varieties, that is the case of a function field of one variable over a finite field, the principal results of the book of Michael Harris and Richard Taylor [16] which treats about some Shimura varieties over number fields. We give in particular the restriction to the open strata of the vanishing cycles sheaves in terms of some local systems named Harris-Taylor's local systems which we calculate the alternated sum of the cohomology group with compact supports. In the last half of the book, we describe the monodromy filtration of the vanishing cycles perverse sheaf and the spectral sequence associated to it. Thanks to the Berkovich-Fargues' theorem, we obtain the description of the local monodromy filtration of the Deligne-Carayol model.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
I. Variétés d'Igusa, systèmes locaux de Harris-Taylor et cycles évanescents des variétés de Drinfeld	7
Introduction	7
I.1. Modules formels et variétés de Drinfeld : rappels	10
I.1.1. Rappels sur les déformations des $\mathcal{O}_o$ -modules formels	10
I.1.2. $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques et structures de niveau	12
I.1.3. Schémas de modules et correspondances de Hecke	15
I.1.4. Structures de niveau à l'infini	16
I.1.5. Stratification de la fibre spéciale	19
I.1.6. Théorème de Serre-Tate et conséquences	21
I.2. Compléments sur la géométrie des strates	24
I.2.1. Scindage en partie étale et connexe des $\mathcal{O}_o$ -modules de Dieudonné ..	24
I.2.2. Retour sur les structures de niveaux	28
I.2.3. Relation de congruence	31
I.3. Variétés d'Igusa de première espèce	32
I.3.1. Définition	32
I.3.2. Expression du complété formel de $M_{I,o}$ le long d'une strate	35
I.3.3. Correspondances de Hecke	36
I.4. Variétés d'Igusa de seconde espèce	39
I.4.1. Définition	39
I.4.2. Correspondances de Hecke sur $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\neq h}(s)$	41
I.4.3. Complétés formels	42
I.5. Cycles évanescents et systèmes locaux de Harris-Taylor	50
I.5.1. Rappels sur les cycles évanescents associés à $\text{Def}_{d,n}$	50
I.5.2. Restriction aux strates ouvertes et variétés d'Igusa	51
I.5.3. Systèmes locaux de Harris-Taylor	56
I.6. Équations formelles des variétés d'Igusa de seconde espèce	60
II. Groupes de cohomologie du modèle local : cas Iwahori	63
Introduction	63
II.1. Rappels sur les représentations de $\text{GL}_d(F_o)$	64
II.1.1. Induites paraboliques	64

II.1.2. Foncteur de Jacquet	67
II.2. Preuve du cas Iwahori	68
III. Description de la somme alternée des groupes de cohomologie ...	79
Introduction	79
III.1. des systèmes locaux de Harris-Taylor	80
III.1.1. Description adélique de $M_{I, \bar{s}_o}(\overline{\mathbb{F}}_p)$	80
III.1.2. Description adélique de $\widehat{M}_{I, -s_o}(\overline{\mathbb{F}}_p)$	84
III.1.3. Comptage des points fixes	86
III.1.4. Intégrales orbitales	88
III.1.5. Formule des traces de Lefschetz	91
III.1.6. Transfert des intégrales orbitales	94
III.1.7. Formule des traces de Selberg	97
III.2. du modèle local	98
III.2.1. Preuve par récurrence	98
III.2.2. Retour sur le cas Iwahori	101
IV. Filtration de monodromie des cycles évanescents	103
Introduction	103
IV.1. Rappels des données géométriques	106
IV.1.1. Le modèle local de Deligne-Carayol	106
IV.1.2. Les variétés globales et les systèmes locaux de Harris-Taylor	107
IV.2. Rappels des propriétés cohomologiques	109
IV.2.1. Sur le modèle local	110
IV.2.2. Sur les systèmes locaux de Harris-Taylor	111
IV.3. Énoncés des théorèmes globaux	113
IV.4. Corollaires locaux	117
IV.5. Principe de la preuve : par récurrence sur le modèle local	119
IV.6. Reconstruction hors des points supersinguliers	119
IV.6.1. Image dans $\mathfrak{G}$ de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}$	119
IV.6.2. Faisceaux de cohomologie des $\mathcal{P}(t, \pi_o)$	120
IV.6.3. Constituants simples des $j_{\mathcal{J}, !}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$	124
IV.7. Étude aux points supersinguliers	125
IV.7.1. Calculs de groupes de cohomologie	125
IV.7.2. Application aux constituants ponctuels des $j_{\mathcal{J}, !}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$	127
IV.8. Étude de la suite spectrale des cycles évanescents	129
IV.8.1. Cas où $\Pi_o \simeq \text{St}_s(\pi_o)$	129
IV.8.2. Cas où $\Pi_o \simeq \text{Speh}_s(\pi_o)$	133
IV.8.3. Parties de poids minimal de la cohomologie locale	137
IV.9. Preuve des théorèmes globaux	140
IV.9.1. Faisceaux de cohomologie aux points supersinguliers des $\mathcal{P}(t, \pi_o)$..	140
IV.9.2. Description de la suite spectrale de monodromie de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}$	141

V. Compléments sur la cohomologie globale et applications	143
Introduction	143
V.1. Calculs de foncteur de Jacquet	144
V.2. Composantes locales des représentations automorphes	146
V.3. Correspondances de Jacquet-Langlands globales	150
V.4. Groupes de cohomologie des variétés de Drinfeld	152
V.5. Irréductibilité des variétés d'Igusa	153
V.6. Semi-simplicité de la cohomologie sous l'action de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}$	157
VI. Figures	161
Bibliographie	165

