

# Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

**Numéro 181**  
**Nouvelle série**

**COMPLEXES DE MODULES  
ÉQUIVARIANTS SUR  
L'ALGÈBRE DE STEENROD  
ASSOCIÉS À  
UN  $(\mathbb{Z}/2)^n$ -CW-COMPLEXE FINI**

**2 0 2 4**

**D. BOURGUIBA, J. LANNES,  
L. SCHWARTZ & S. ZARATI**

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

---

### *Comité de rédaction*

Boris ADAMCZEWSKI  
François CHARLES  
Gabriel DOSPINESCU  
Béatrice de TILLIÈRE  
Clotilde FERMANIAN

Dorothee FREY  
Youness LAMZOURI  
Wendy LOWEN  
Ludovic RIFFORD

François DAHMANI (dir.)

### *Diffusion*

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 9  
France  
commandes@smf.emath.fr

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

### *Tarifs*

*Vente au numéro* : 42 € (\$ 63)

*Abonnement électronique* : 128 € (\$ 192)

*Abonnement avec supplément papier* : 220 €, hors Europe : 265 € (\$ 397)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### *Secrétariat*

Mémoires de la SMF  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
memoires@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2024

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN papier 0249-633-X; électronique : 2275-3230

ISBN 978-2-85629-991-3

doi:10.24033/msmf.489

Directeur de la publication : Fabien DURAND

---

**COMPLEXES DE MODULES ÉQUIVARIANTS  
SUR L'ALGÈBRE DE STEENROD  
ASSOCIÉS À UN  $(\mathbb{Z}/2)^n$ -CW-COMPLEXE FINI**

**Dorra Bourguiba**

**Jean Lannes**

**Lionel Schwartz**

**Saïd Zarati**

*D. Bourguiba*

Université Tunis El Manar, Faculté des Sciences de Tunis, Département de Mathématiques, TN-2092, El Manar, Tunis, Tunisie.

*E-mail* : dorra.bourguiba@fst.utm.tn

*J. Lannes*

CMLS, École polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France,  
Université Paris-Cité, IMJ-PRG.

*E-mail* : jean.lannes@polytechnique.edu

*L. Schwartz*

LAGA UMR 7539 CNRS, Institut Galilée, Université Sorbonne Paris Nord, av. J.-B. Clément, F-93430 Villetaneuse, France.

*E-mail* : lionel-schwartz@wanadoo.fr

*S. Zarati*

Université Tunis El Manar, Faculté des Sciences de Tunis, Département de Mathématiques, TN-2092, El Manar, Tunis, Tunisie.

*E-mail* : said.zarati@fst.utm.tn

Soumis le 20 juin 2021 ; révisé le 19 octobre 2022 ; accepté le 25 janvier 2023.

---

***Classification mathématique par sujets (2000).*** – 55XX, 18GXX.

***Mots-clefs.*** – Cohomologie équivariante, A-modules instables,  $H^*V$ -A-modules instables, foncteurs Fix, modules de Steinberg, filtration par la codimension du support.

***Key words and phrases.*** – Equivariant cohomology, unstable A-modules, unstable  $H^*V$ -A-modules, fix functors, Steinberg modules, filtration by codimension of support.

---

# COMPLEXES DE MODULES ÉQUIVARIANTS SUR L'ALGÈBRE DE STEENROD ASSOCIÉS À UN $(\mathbb{Z}/2)^n$ -CW-COMPLEXE FINI

Dorra Bourguiba, Jean Lannes, Lionel Schwartz, Saïd Zarati

*Résumé.* – Soient  $V$  un 2-groupe abélien élémentaire et  $X$  un  $V$ -CW-complexe fini.

Dans ce mémoire nous étudions deux complexes de modules sur  $A$ , l'algèbre de Steenrod modulo 2, munis d'une action compatible de  $H^*V$ , la cohomologie modulo 2 de  $V$ , complexes tous deux associés à  $X$ . Le premier, que nous appelons le « complexe topologique », est défini à l'aide de la filtration par les orbites de  $X$ . Le second, que nous appelons le « complexe algébrique », est défini en termes de la structure de  $H^*V$ - $A$ -module instable dont est munie  $H_V^*X$ , la cohomologie modulo 2 équivariante de  $X$  (ce qui signifie que nous pouvons remplacer dans cette définition  $H_V^*X$  par un  $H^*V$ - $A$ -module instable arbitraire). Ces deux complexes sont de longueur  $\dim_{\mathbb{Z}/2} V$  et peuvent être coaugmentés par  $H_V^*X$  ; nous construisons en outre un morphisme  $\kappa$  du complexe algébrique vers le complexe topologique compatible avec la coaugmentation.

Nous montrons en particulier que ces deux complexes coaugmentés sont acycliques si et seulement si  $H_V^*X$  est libre comme  $H^*V$ -module. Dans ce cas  $\kappa$  est un isomorphisme ce qui implique que tous les termes du complexe topologique sont des modules instables sur l'algèbre de Steenrod.

Pour illustrer le résultat évoqué ci-dessus nous étudions en détail le cas où  $H_V^*X$  est libre de dimension 1 comme  $H^*V$ -module. Ceci a lieu si (et en un certain sens seulement si)  $X$  est la compactification à l'infini d'une représentation linéaire réelle (de dimension finie) de  $V$ . Dans certains cas particuliers nous donnons des informations très précises sur la structure du complexe (topologique ou algébrique) associé à  $X$ .

Il existe un chevauchement notable entre la partie topologique de notre mémoire et l'article « Syzygies in equivariant cohomology in positive characteristic », de Allday, Franz et Puppe, qui vient d'apparaître. Cependant nos techniques sont très différentes des leurs : le nom « Steenrod » ne figure pas dans leur article tandis que notre étude fait un usage intensif de la théorie des  $H^*V$ - $A$ -modules instables (en particulier celle des foncteurs  $\text{Fix}$ ) qui est un sous-produit des recherches sur la conjecture de Sullivan.

Les relations entre notre travail et celui de Allday, Franz et Puppe sont examinées en détail.