326

# ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(982) *Existence de modèles minimaux pour les variétés de type général*

Stéphane DRUEL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2007
60e année, 2007–2008, no 982, p. 1 à 38

# EXISTENCE DE MODÈLES MINIMAUX POUR LES VARIÉTÉS DE TYPE GÉNÉRAL [d'après Birkar, Cascini, Hacon et McKernan]

par **Stéphane DRUEL**

## INTRODUCTION

La classification des variétés[1] projectives lisses à équivalence birationnelle près est un problème central en géométrie algébrique. On rappelle que deux variétés $X$ et $X'$ sont dites birationnellement équivalentes ou simplement birationnelles s'il existe un isomorphisme d'un ouvert dense de $X$ sur un ouvert dense de $X'$.

Un des premiers objets intrinsèquement attachés à une variété projective lisse $X$ est son *fibré canonique* $\omega_X$, défini comme le déterminant de son fibré cotangent. Pour tout entier $m$, le $m$-ième *plurigenre* est la dimension de l'espace vectoriel des sections globales du fibré en droites $\omega_X^{\otimes m}$ ; on le note $P_m(X)$. On définit un invariant numérique de $X$, appelé sa *dimension de Kodaira*, en posant $\kappa(X) = \limsup_{m\to+\infty} \dfrac{\log P_m(X)}{\log m}$. On a $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, \ldots, \dim(X)\}$ ; on dit que $X$ est *de type général* si $\kappa(X) = \dim(X)$.

Il est connu depuis longtemps que deux variétés projectives lisses birationnelles ont de nombreuses propriétés en commun : la dimension de Kodaira et les plurigenres sont des exemples d'invariants birationnels des variétés projectives lisses. La question peut être formulée ainsi.

*Existe-t-il un « bon » représentant d'une classe d'équivalence birationnelle donnée ?*

Le cas des courbes est particulier puisque deux courbes (projectives lisses) birationnelles sont isomorphes. Le cas des surfaces est plus compliqué, toute classe d'équivalence birationnelle contenant une infinité de surfaces projectives lisses deux à deux non isomorphes. La solution au problème précédent a été donnée par les géomètres italiens au début du siècle dernier. Soit $X$ une surface projective lisse. Il existe une

[1] Nous travaillons sur le corps des nombres complexes et toutes nos variétés sont algébriques et irréductibles.

surface projective lisse $X_\bullet$ et un morphisme birationnel $X \to X_\bullet$ tels que ou bien le fibré canonique $\omega_{X_\bullet}$ soit numériquement effectif, on dit que $X_\bullet$ est un *modèle minimal* de $X$, ou bien il existe un morphisme projectif $c_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ tel que $\dim(Y_\bullet) \leqslant 1$ et $\omega_{X_\bullet}^{\otimes -1}$ soit ample relativement à $Y_\bullet$, le morphisme $c_\bullet$ est appelé une *fibration de Mori*[(2)]. On peut être plus précis : dans la seconde alternative, ou bien $X_\bullet$ est isomorphe à $\mathbf{P}^2$ et $\dim(Y_\bullet) = 0$ ou bien $X_\bullet \to Y_\bullet$ est une surface géométriquement réglée. On obtient $X_\bullet$ en contractant successivement des courbes exceptionnelles de première espèce, *i.e.* des courbes rationnelles lisses d'auto-intersection $-1$. La variété $X_\bullet$ est unique à quelques exceptions près bien comprises.

Il faut attendre le début des années 80 et les travaux de Mori ([**20**]) et Reid ([**23**]) pour entrevoir la possibilité de généraliser l'approche italienne à la dimension supérieure. Les obstacles sont nombreux. Il existe des variétés projectives lisses de dimension 3, de type général, n'ayant pas de modèle minimal lisse (voir par exemple [**24**, Examples 2.8]) ; il faut donc considérer des variétés singulières. Soit $X$ une variété projective lisse. Le programme de Mori ou programme des modèles minimaux ou encore MMP (« Minimal Model Program » en anglais) prédit l'existence d'une variété projective $X_\bullet$ birationnellement équivalente à $X$, peu singulière[(3)], telle que ou bien le diviseur canonique $K_{X_\bullet}$ soit numériquement effectif, ou bien il existe un morphisme projectif $c_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ tel que $\dim(X_\bullet) < \dim(X_\bullet)$ et $-K_{X_\bullet}$ soit ample relativement à $Y_\bullet$. Il prédit aussi comment obtenir $X_\bullet$ au moyen de transformations birationnelles ; il ne suffit plus, comme c'était le cas pour les surfaces, de contracter des diviseurs, il faut introduire de nouvelles transformations birationnelles, les flips, dont l'existence est conjecturale. La dernière difficulté est la question de l'aboutissement du programme ou encore le problème de la non-existence de suite infinie de flips qui, là encore, est conjecturale.

À la suite de contributions de Kawamata, Shokurov et Tsunoda pour les principales, Mori prouve l'existence des flips en dimension 3 ([**21**]). L'existence des flips en dimension 4 est due à Shokurov ([**28**], voir également [**6**]). La non-existence de suite infinie de flips est démontrée par Shokurov ([**25**]) en dimension 3 et par Kawamata, Matsuda et Matsuki ([**15**]) en dimension 4. Le programme des modèles minimaux est donc complet en dimension $\leqslant 4$.

De larges parties du MMP ont été généralisées en dimension $\geqslant 5$ mais les principales conjectures demeuraient : l'existence des flips et la non-existence de suite infinie de flips.

Le but de ce texte est d'exposer les travaux récents de Birkar, Cascini, Hacon et McKernan sur ces questions. Les progrès réalisés sont spectaculaires : ils montrent,

(2) Le point de vue adopté ici, généralement attribué à Reid, diffère de celui des géomètres italiens.
(3) À singularités terminales.

par exemple, l'existence des flips en toutes dimensions (voir le corollaire 2.5 pour un énoncé précis) et la non-existence de suite infinie de flips dirigés lorsque $X$ est de type général (voir le corollaire 2.8). Ils n'obtiennent pas la non-existence de suite infinie de flips en toute généralité mais leurs résultats sont néanmoins suffisants pour beaucoup d'applications.

Théorème 0.1. — *Soit $X$ une variété projective lisse.*

1. *Si $X$ est de type général, alors il existe une variété projective $X_\bullet$ birationnellement équivalente à $X$, peu singulière, telle que $K_{X_\bullet}$ soit numériquement effectif.*
2. *Si $K_X$ n'est pas pseudo-effectif, alors il existe encore une variété projective $X_\bullet$ birationnellement équivalente à $X$, peu singulière, et un morphisme projectif $c_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ tels que $\dim(Y_\bullet) < \dim(X_\bullet)$ et $-K_{X_\bullet}$ soit ample relativement à $Y_\bullet$.*

Soit $X$ une variété projective lisse. La finitude de l'algèbre canonique

$$\bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(kK_X))$$

est un problème classique et difficile. On sait qu'elle est de type fini sur $\mathbf{C}$ si $\dim(X) \leqslant 3$ grâce aux travaux de Zariski si $\dim(X) = 2$, Fujita et ceux que nous avons déjà cités si $\dim(X) = 3$ ; très peu de choses étaient connues jusqu'alors en dimension plus grande.

Théorème 0.2. — *Soit $X$ une variété projective lisse. L'algèbre canonique*

$$\bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(kK_X))$$

*est de type fini sur $\boldsymbol{C}$*[(4)].

Le lien avec la question initiale est le suivant. L'énoncé précédent est une conséquence (facile) de l'existence de modèles minimaux et de la conjecture d'abondance qui, $X_\bullet$ étant un modèle minimal de $X$, prédit que le système linéaire $|mK_{X_\bullet}|$ est sans point base pour $m \gg 0$ (voir par exemple [**23**, Conjecture 4.6]).

L'approche de Birkar, Cascini, Hacon et M^c^Kernan est un peu différente, ils ne montrent ni l'existence de modèles minimaux, ni la conjecture d'abondance en général (voir théorèmes 2.1 et 1.18).

Le texte est organisé de la façon suivante. On rassemble dans la première partie des résultats « classiques » sur le programme des modèles minimaux et ses extensions aux paires d'une part et à la situation relative d'autre part. On présente les résultats

(4) Une preuve de ce résultat lorsque $X$ est supposée de type général est annoncée dans [**31**].

en début de seconde partie et on donne ensuite les grandes lignes des démonstrations des principaux résultats.

Je remercie pour leur aide à la préparation de ce texte Laurent Bonavero, Sébastien Boucksom, Philippe Eyssidieux, Caroline Gruson, Catriona Maclean, James M^c^Kernan et Tanguy Rivoal, ainsi que tous les participants au groupe de travail de Grenoble.

## 1. LE MMP

### 1.1. Notations et rappels

Dans la suite de ce texte, le symbole $X/Z$ désigne un morphisme projectif $X \to Z$ de variétés quasi-projectives normales. Si $X/Z$ et $Y/Z$ sont deux tels objets, le symbole $X/Z \to Y/Z$ (resp. $X/Z \dashrightarrow Y/Z$) désigne un morphisme $\pi : X \to Y$ (resp. une application rationnelle $\pi : X \dashrightarrow Y$) tel que $g \circ \pi = f$ où $f$ et $g$ sont respectivement les morphismes de $X$ et $Y$ vers $Z$.

Soit $f : X \to Z$ comme ci-dessus. Un diviseur de Weil sur $X$ est une combinaison linéaire formelle $D = \sum_{i \in I} d_i D_i$, à coefficients entiers, d'hypersurfaces irréductibles de $X$. Il est dit effectif lorsque tous les coefficients sont positifs ; on écrit alors $D \geqslant 0$. Il est dit premier si une seule hypersurface irréductible apparaît dans $D$ et qu'elle a coefficient 1. On considérera aussi des $\mathbf{Q}$-diviseurs et des $\mathbf{R}$-diviseurs. On définit $\llcorner D \lrcorner = \sum_{i \in I} \llcorner d_i \lrcorner D_i$ et $\ulcorner D \urcorner = \sum_{i \in I} \ulcorner d_i \urcorner D_i$.

Toute fonction rationnelle non nulle $u$ sur $X$ a un diviseur, celui de ses pôles et zéros, noté $\mathrm{div}(u)$.

On désigne par $K_X$ un diviseur canonique sur $X$, c'est-à-dire le diviseur d'une forme différentielle méromorphe de degré maximal ; si $X$ est lisse, on a $\mathcal{O}_X(K_X) \simeq \omega_X$.

Un diviseur de Cartier sur $X$ est un diviseur de Weil qui peut être défini localement par une seule équation.

Le groupe des diviseurs de Weil sur $X$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$) est noté $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Z}}$ (resp. $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Q}}$ et $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$). Le sous-groupe de $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Z}}$ formé des diviseurs de Cartier sur $X$ est noté $\mathrm{Div}(X)$. Un $\mathbf{Q}$-diviseur (resp. $\mathbf{R}$-diviseur) de Weil est dit $\mathbf{Q}$-Cartier (resp. $\mathbf{R}$-Cartier) s'il est dans le $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel ($\mathbf{R}$-sous-espace vectoriel) de $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$) engendré par $\mathrm{Div}(X)$. L'ensemble des $\mathbf{Q}$-diviseurs de Weil $\mathbf{Q}$-Cartier (resp. $\mathbf{R}$-diviseurs de Weil $\mathbf{R}$-Cartier) est noté $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$).

Les diviseurs $D_1$ et $D_2$ de $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$) sont dits $\mathbf{Q}$-linéairement équivalents relativement à $Z$ (resp. $\mathbf{R}$-linéairement équivalents relativement à $Z$) et on note $D_1 \sim_{\mathbf{Q},Z} D_2$ (resp. $D_1 \sim_{\mathbf{R},Z} D_2$) s'il existe $u_j \in \mathrm{Rat}(X) \setminus \{0\}$, $r_j \in \mathbf{Q}$

(resp. $r_j \in \mathbf{R}$) pour $j \in J$ fini et $D_Z \in \mathrm{Div}(Z)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $D_Z \in \mathrm{Div}(Z)_{\mathbf{R}}$) tels que $D_1 - D_2 = \sum_{j \in J} r_j \,\mathrm{div}(u_j) + f^* D_Z$ où $\mathrm{Rat}(X)$ désigne le corps des fonctions rationnelles sur $X$.

On note $\mathrm{Z}_1(X/Z)$ le groupe abélien libre engendré par les courbes intègres complètes $C \subset X$ telles que $\dim(f(C)) = 0$.

Les diviseurs $D_1$ et $D_2$ de $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$) sont dits numériquement équivalents relativement à $Z$ et on note $D_1 \equiv_{\mathbf{Q},Z} D_2$ (resp. $D_1 \equiv_{\mathbf{R},Z} D_2$) si $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$ pour tout 1-cycle $C \in \mathrm{Z}_1(X/Z)$.

On note $\mathrm{N}_1(X/Z)$ (resp. $\mathrm{N}^1(X/Z)$) l'espace vectoriel réel $\mathrm{Z}_1(X/Z) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ (resp. $\mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$) modulo la relation d'équivalence numérique définie ci-dessus. Les espaces vectoriels réels $\mathrm{N}_1(X/Z)$ et $\mathrm{N}^1(X/Z)$ sont de dimension finie ; leur dimension commune est appelée le nombre de Picard relatif et notée $\rho(X/Z)$.

Le cône convexe fermé de $\mathrm{N}_1(X/Z)$ engendré par les classes des 1-cycles effectifs de $\mathrm{Z}_1(X/Z)$ est noté $\overline{\mathrm{NE}}(X/Z)$.

On note $\mathrm{Amp}(X/Z) \subset \mathrm{N}^1(X/Z)$ le cône convexe engendré par les classes de diviseurs amples relativement à $Z$ et $\mathrm{Nef}(X/Z)$ son adhérence. Un élément $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit ample relativement à $Z$ ou *ample/$Z$* (resp. numériquement effectif relativement à $Z$ ou encore *nef/$Z$*) si sa classe dans $\mathrm{N}^1(X/Z)$ est dans $\mathrm{Amp}(X/Z)$ (resp. $\mathrm{Nef}(X/Z)$) de façon équivalente, si pour tout $C \in \overline{\mathrm{NE}}(X/Z) \setminus \{0\}$, on a $D \cdot C > 0$ (resp. $D \cdot C \geqslant 0$) (voir [**16**]).

Un $\mathbf{Q}$-diviseur $D \in \mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Q}}$ est dit effectif relativement à $Z$ ou *effectif/$Z$* s'il existe un diviseur effectif $B \in \mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Q}}$ tel que $D \sim_{\mathbf{Q},Z} B$. On note $\mathrm{Eff}(X/Z)$ le cône convexe de $\mathrm{N}^1(X/Z)$ engendré par les classes des $\mathbf{Q}$-diviseurs de Weil $\mathbf{Q}$-Cartier effectifs/Z et $\mathrm{Pef}(X/Z)$ son adhérence. Un élément $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit pseudo-effectif relativement à $Z$ ou encore *pseudo-effectif/$Z$* si sa classe dans $\mathrm{N}^1(X/Z)$ est dans $\mathrm{Pef}(X/Z)$. L'intérieur du cône $\mathrm{Pef}(X/Z)$ est noté $\mathrm{Big}(X/Z)$. Un élément $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit grand (« big » en anglais) relativement à $Z$ ou *grand/$Z$* si sa classe dans $\mathrm{N}^1(X/Z)$ est dans $\mathrm{Big}(X/Z)$. Quitte à remplacer $Z$ par la normalisation de $f(X)$, on peut toujours supposer $f$ dominant. La terminologie est alors justifiée par le fait qu'un élément $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est grand/$Z$ si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que $\mathrm{rang}(f_* \mathcal{O}(\llcorner mD \lrcorner)) \geqslant c(\dim(X) - \dim(Z))^m$ pour tout $m \gg 0$. Le lemme de Kodaira en donne une autre caractérisation : $D$ est grand/$Z$ si et seulement si pour tout $A \in \mathrm{Amp}(X/Z)$, il existe un réel $t > 0$ et $B \in \mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$ effectif tel que $D \sim_{\mathbf{R},Z} tA + B$. L'une ou l'autre de ces deux caractérisations permet d'étendre la définition précédente aux $\mathbf{R}$-diviseurs de Weil.

Un élément $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit semi-ample relativement à $Z$ ou encore *semi-ample/$Z$* s'il existe un morphisme $\pi : X/Z \to Y/Z$ et $D_Y \in \mathrm{Amp}(Y/Z)$ tel que $D \sim_{\mathbf{R},Z} \pi^* D_Y$ (5)(6).

L'interprétation géométrique des diviseurs à coefficients réels n'est pas évidente, il faut la chercher du côté de la géométrie complexe où, par exemple, si $X$ est supposée projective et lisse, la classe d'un $\mathbf{R}$-diviseur pseudo-effectif dans $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{R})$ peut être représentée par un courant positif fermé de type $(1,1)$ (voir par exemple [**7**]).

### 1.2. Les singularités de paires

Le lecteur pourra consulter le très joli texte [**18**] sur le sujet ainsi que [**6**, Chapter 3]. L'introduction des paires peut sembler un peu artificielle au premier abord mais il ne fait plus aucun doute aujourd'hui que les techniques sous-jacentes sont un outil extrêmement efficace pour étudier les variétés de dimension supérieure.

DÉFINITION 1.1. — *Une paire $(X, \Delta)$ (resp. $(X/Z, \Delta)$) est la donnée d'une variété quasi-projective $X$ normale et d'un $\mathbf{R}$-diviseur de Weil effectif $\Delta$ sur $X$ (resp. d'un morphisme $f : X \to Z$ de variétés quasi-projectives normales et d'un $\mathbf{R}$-diviseur de Weil effectif $\Delta$ sur $X$) tels que $K_X + \Delta$ soit $\mathbf{R}$-Cartier.*

Soient $(X, \Delta)$ une paire et $\pi : V \to X$ une résolution des singularités de $(X, \Delta)$ (7). Écrivons

$$K_V + \tilde{\Delta} = \pi^*(K_X + \Delta) + \sum_F a_F(X, \Delta) F$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers $\pi$-exceptionnels, $\tilde{\Delta}$ est le transformé strict de $\Delta$ dans $V$ et, si $K_X$ est le diviseur d'une forme différentielle méromorphe $\omega_X$ sur $X$, $K_V$ est le diviseur de $\omega_X$ sur $V$, vue comme forme différentielle méromorphe sur $V$. Les coefficients $a_F(X, \Delta)$ ne dépendent pas du choix des diviseurs canoniques $K_V$ et $K_X$ par le lemme suivant (voir par exemple [**19**, Lemma 3.39]).

LEMME 1.2 (Lemme de négativité). — *Soient $\pi : V \to X$ un morphisme propre et birationnel de variétés normales et $B \in \mathrm{Div}(V)_{\mathbf{R}}$. On suppose $-B$ nef/$X$. Alors $B$ est effectif si et seulement si $\pi_* B$ l'est. En particulier, tout $\mathbf{R}$-diviseur de Weil $\mathbf{R}$-Cartier sur $V$, $\pi$-exceptionnel et $\pi$-numériquement trivial est nul.*

(5) Si $\pi$ est propre et à fibres connexes alors $\pi$ est unique à isomorphisme près ; il est alors déterminé par les courbes complètes $C \subset X$ telles que $D \cdot C = 0$.

(6) On retrouve la définition usuelle si $D$ est à coefficients entiers ou rationnels.

(7) Une résolution des singularités de la paire $(X, \Delta)$ est un morphisme projectif birationnel $\pi : V \to X$ avec $V$ lisse tel que $\mathrm{Exc}(\pi)$ soit de codimension pure 1 et $\mathrm{Exc}(\pi) + \pi^{-1}(\mathrm{Supp}(\Delta))$ un diviseur dont le support est à croisements normaux simples, *i.e.* les composantes irréductibles de son support sont lisses et se coupent transversalement. Il en existe toujours.

Si $F \subset V$ est maintenant un diviseur premier non $\pi$-exceptionnel, on définit $a_F(X,\Delta)$ comme étant *l'opposé* du coefficient de $F$ dans $\tilde{\Delta}$.

DÉFINITION 1.3. — *Le réel $a_F(X,\Delta)$ est appelé la discrépance du diviseur $F$ relativement à la paire $(X,\Delta)$.*

L'anneau local $\mathscr{O}_{F,Y} \subset \mathrm{Rat}(X)$, où $F \subset V$ est un diviseur premier, est un anneau de valuation discrète correspondant à une valuation $v_F$ sur $\mathrm{Rat}(X)$. Une telle valuation est appelée une *valuation algébrique*. Soient $\pi' : V' \to X$ une autre résolution des singularités de $(X,\Delta)$ et $F' \subset V'$ un diviseur premier ; $v_F = v_{F'}$ si et seulement si l'application rationnelle induite $V \dashrightarrow V'$ est un isomorphisme aux points génériques de $F$ et $F'$ respectivement et dans ce cas $a_F(X,\Delta) = a_{F'}(X,\Delta)$. Le réel $a_F(X,\Delta)$ ne dépend donc que de $v_F$ et pas de $\pi$. Une valuation algébrique $v_F$ sur $\mathrm{Rat}(X)$ est dite *exceptionnelle* sur $X$ si son centre dans $X$ est de codimension au moins 2. Posons

$$\mathrm{discrep}(X,\Delta) := \inf\{a_F(X,\Delta) \text{ où } v_F \text{ est exceptionnelle sur } X\}.$$

DÉFINITION 1.4. — *Une paire $(X,\Delta)$ est dite*

$$\begin{cases} \textit{klt pour Kawamata log-terminale} \\ \textit{plt pour purement log-terminale} \\ \textit{lc pour log-canonique} \end{cases} \quad \textit{si discrep}(X,\Delta) \begin{cases} > -1 \textit{ et } \llcorner \Delta \lrcorner = 0, \\ > -1, \\ \geqslant -1. \end{cases}$$

*La paire $(X/Z,\Delta)$ est dite klt (resp. plt, lc) si $(X,\Delta)$ l'est.*

DÉFINITION 1.5. — *Une paire $(X,\Delta)$ est dite dlt pour divisoriellement log-terminale si les coefficients de $\Delta$ sont inférieurs à 1 et s'il existe un ouvert $X_0 \subset X$ tel que $X_0$ soit lisse, $\Delta_{|X_0}$ un diviseur dont le support est à croisements normaux simples et $a_F(X,\Delta) > -1$ pour toute valuation $v_F$ dont le centre dans $X$ est contenu dans $X \setminus X_0$ (8). La paire $(X/Z,\Delta)$ est dite dlt si $(X,\Delta)$ l'est.*

*Exemple 1.6.* — La paire $(\mathbf{C}^2, C_1)$ où $C_1$ est la cubique cuspidale d'équation $\{(x,y) \mid y^2 = x^3\}$ n'est pas lc, la paire $(\mathbf{C}^2, C_2)$ où $C_2$ est la cubique nodale d'équation $\{(x,y) \mid x^3 + y^3 - xy = 0\}$ est lc mais pas dlt et, enfin, la paire $(\mathbf{C}^2, C_3)$ où $C_3 := \{(x,y) \mid xy = 0\}$ est dlt mais pas plt.

(8) De façon équivalente, une paire $(X,\Delta)$ est dlt si les coefficients de $\Delta$ sont inférieurs à 1 et s'il existe une résolution $\pi : V \to X$ des singularités de $(X,\Delta)$ telle que pour tout diviseur premier $F \subset V$ $\pi$-exceptionnel on ait $a_F(X,\Delta) > -1$ (voir **[32]**).

*Exemple 1.7.* — Soient $X$ une variété quasi-projective lisse et $\Delta = \sum_{i \in I} \delta_i \Delta_i$ un diviseur effectif dont le support est à croisements normaux simples. La paire $(X, \sum_{i \in I} \delta_i \Delta_i)$ est

$$\begin{cases} \text{klt} \\ \text{plt} \\ \text{dlt} \\ \text{lc} \end{cases} \quad \text{ssi pour tout } i, j \in I \begin{cases} \delta_i < 1, \\ \delta_i \leqslant 1 \text{ et } \delta_i + \delta_j < 2 \text{ si } \Delta_i \cap \Delta_j \neq \varnothing \text{ et } i \neq j, \\ \delta_i \leqslant 1, \text{ et} \\ \delta_i \leqslant 1. \end{cases}$$

La classe des paires $(X, \Delta)$ klt est grosso modo la classe de singularités de paires la plus grande où tout fonctionne essentiellement comme si $X$ était lisse et $\Delta = 0$ mais dont le principal défaut est de ne pas permettre les raisonnements par récurrence sur la dimension. Les classes de singularités de paires plt, dlt et lc sont introduites pour y remédier.

Soit $(X, \Delta)$ une paire dlt. Alors $X$ est à singularités rationnelles et en particulier de Cohen-Macaulay(9) (voir [**8**] et [**15**, Theorem 1.3.6]). De plus, $(X, \Delta)$ est « limite » d'une suite de paires klt ; de façon plus précise, si $A$ est un diviseur ample sur $X$, il existe un réel $c > 0$ et un $\mathbf{R}$-diviseur de Weil $\Delta_1 \sim_{\mathbf{R}} \Delta + cA$ tel que la paire $(X, (1-t)\Delta + t\Delta_1)$ soit klt pour tout $0 < t \ll 1$.

La proposition suivante explique le lien entre les singularités de paires plt et dlt.

PROPOSITION 1.8 ([**19**, Proposition 5.51]). — *Soit $(X, \Delta)$ une paire dlt. Alors $(X, \Delta)$ est plt si et seulement si $\llcorner \Delta \lrcorner$ est réunion disjointe de ses composantes irréductibles, auquel cas $\llcorner \Delta \lrcorner$ est normal.*

On peut montrer que si $\operatorname{discrep}(X, \Delta) < -1$ alors en fait $\operatorname{discrep}(X, \Delta) = -\infty$ : la classe des paires lc est donc la classe de singularités de paires la plus grande qui puisse être définie de cette façon. On espère pouvoir étendre le MMP aux paires lc mais personne ne sait encore le faire(10).

La formule suivante, dite d'adjonction, motive en partie l'introduction des paires (voir [**15**, Lemma 5.1.9] et [**17**, Chapter 16]).

THÉORÈME 1.9. — *Soient $X$ une variété normale et $S \subset X$ une hypersurface normale telles que $K_X + S$ soit $\boldsymbol{Q}$-Cartier. Alors il existe un $\boldsymbol{Q}$-diviseur de Weil effectif $\operatorname{Diff}_S$ sur $S$, appelé la différente, ne dépendant pas des choix de $K_S$ et $K_X$ tel que*

$$(K_X + S)_{|S} \sim_{\boldsymbol{Q}} K_S + \operatorname{Diff}_S{}^{(11)}.$$

(9) La paire $(X, 0)$ où $X$ est un cône sur une variété abélienne de dimension $\geqslant 2$ est lc mais pas de Cohen-Macaulay, $X$ n'étant pas $S_3$ en son sommet (voir [**19**, Example 5.23]).

(10) Quelques résultats dans cette direction sont annoncés dans [**10**] (voir également [**2**]).

(11) Le diviseur $\operatorname{Diff}_S$ est supporté par les composantes de codimension 2 du lieu singulier de $X$ contenues dans $S$.

*Exemple 1.10.* — Soient $X \subset \mathbf{P}^3$ le cône quadratique d'équation $xy = z^2$ et $S \subset X$ la droite d'équations $x = z = 0$. Si $p$ est le sommet de $X$ alors $\mathrm{Diff}_S = \frac{1}{2}p$.

LEMME 1.11. — *Soient $X$ une variété normale et $S \subset X$ une hypersurface normale telles que $K_X + S$ soit $\boldsymbol{Q}$-Cartier. Soit $D \in \mathrm{Div}(X)_{\boldsymbol{R}}$ effectif dont le support ne contient pas $S$. Posons $\mathrm{Diff}_S(D) := \mathrm{Diff}_S + D_{|S}$. Si $(X, S + D)$ est plt (resp. dlt, lc) alors $(S, \mathrm{Diff}_S(D))$ est klt (resp. dlt, lc).*

### 1.3. Modèles nef, minimaux et canoniques

Ce qui sera expliqué au paragraphe suivant (et plus particulièrement la remarque 1.22) nous amène à poser les définitions suivantes.

DÉFINITION 1.12. — *Un modèle nef (resp. canonique) $(X_\bullet/Z, \Delta_\bullet, \varphi)$ ou $(X_\bullet/Z, \varphi)$ de la paire $(X/Z, \Delta)$ est la donnée d'une paire $(X_\bullet/Z, \Delta_\bullet)$ et d'une application birationnelle $\varphi : X/Z \dashrightarrow X_\bullet/Z$ telles que*

1. *$\varphi^{-1}$ ne contracte pas de diviseur* [(12)],
2. *$\Delta_\bullet = \varphi_*\Delta$,*
3. *$K_{X_\bullet} + \Delta_\bullet$ soit nef/$Z$ (resp. ample/$Z$) et*
4. *$a_F(X, \Delta) \leqslant a_F(X_\bullet, \Delta_\bullet)$ pour tout diviseur premier $\varphi$-exceptionnel $F$.*

*Un modèle nef est appelé un modèle minimal si*

5. *les inégalités ci-dessus sont strictes* [(13)].

*Remarque 1.13.* — Si $\Delta'$ est un $\mathbf{R}$-diviseur de Weil effectif tel que $K_X + \Delta'$ et $\varphi_*(K_X + \Delta')$ soient $\mathbf{R}$-Cartier et $K_X + \Delta \equiv_{\mathbf{R},Z} K_X + \Delta'$, alors $(X_\bullet/Z, \varphi)$ est un modèle nef (resp. minimal, canonique) de $(X/Z, \Delta)$ si et seulement si c'est un modèle nef (resp. minimal, canonique) de $(X/Z, \Delta')$.

*Remarque 1.14.* — Soit $(X_\bullet/Z, \varphi)$ un modèle nef d'une paire $(X/Z, \Delta)$. Soient $V$ une résolution commune des singularités de $(X, \Delta)$ et $(X_\bullet, \Delta_\bullet)$, $\pi$ et $\pi_\bullet$ les morphismes de $V$ sur $X$ et $X_\bullet$ respectivement et

$$E := \sum_F (a_F(X_\bullet, \Delta_\bullet) - a_F(X, \Delta))F \sim_{\mathbf{R}} \pi^*(K_X + \Delta) - \pi_\bullet^*(K_{X_\bullet} + \Delta_\bullet)$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers de $V$. La condition 4 dans la définition précédente entraîne que $\pi_*E$ est effectif et la condition 3 et le lemme de négativité que $E$ est effectif. Il est $\pi_\bullet$-exceptionnel par la condition 1 et si $(X_\bullet, \Delta_\bullet)$

---

(12) On a donc $\varphi_* K_X = K_{X_\bullet}$.
(13) Soit $(X_\bullet/Z, \varphi)$ un modèle nef d'une paire $(X/Z, \Delta)$ klt. On peut montrer (en utilisant le théorème 2.1) qu'il existe un modèle minimal $(Y/Z, \varphi_0)$ de $(X/Z, \Delta)$ et un morphisme $\varphi_1 : Y/Z \to X_\bullet/Z$ tels que $K_Y + \varphi_{0*}\Delta = \varphi_1^*(K_{X_\bullet} + \varphi_*\Delta)$ (on dit alors que $\varphi_1$ est un morphisme *crépant*) et $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_0$.