Astérisque

F. COMBES
C. DELAROCHE
Y. DENIZEAU
M. ENOCH

Représentation des groupes localement compacts et applications aux algèbres d'opérateurs

Astérisque, tome 55 (1978)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__55__R1_0>

INTRODUCTION

Le but de cet ouvrage est de présenter la théorie générale des sous-espaces spectraux d'une représentation continue U d'un groupe localement compact commutatif G (première partie), et de l'appliquer à l'étude des dérivations et des groupes d'automorphismes des C^*-algèbres et des algèbres de von Neumann (deuxième partie).

Soit G un groupe localement compact commutatif. Si on intègre la représentation de G dans $L^\infty(G)$ obtenue par translations, on obtient l'action par convolution de $L^1(G)$ dans $L^\infty(G)$. Le spectre $\mathrm{sp}\, f$ de $f \in L^\infty(G)$, considéré depuis longtemps en analyse harmonique (voir [35] par exemple), est le sous-ensemble de $\hat{G}$ annulateur de l'idéal fermé K_f de $L^1(G)$, ensemble des $g \in L^1(G)$ tels que $\hat{g} * f = o$. Le sous-espace spectral associé à une partie fermée F de $\hat{G}$ est le sous-espace vectoriel fermé de $L^\infty(G)$ formé des f tels que $\mathrm{sp}\, f \subset F$. Ces définitions furent étendues par F. Forelli [20] au cas où G opère par homéomorphismes dans un espace localement compact X , c'est-à-dire par isomorphismes dans la C^*-algèbre commutative des fonctions continues nulles à l'infini sur X . Enfin W. Arveson [1] les a formulées plus généralement pour les représentations continues de G par automorphismes d'une algèbre de von Neumann ou d'une C^*-algèbre, retrouvant ainsi des résultats classiques (par exemple que toute dérivation d'une algèbre de von Neumann est intérieure) et donnant de nouvelles applications qui montraient l'intérêt de ce nouvel outil. Ces concepts furent aussitôt utilisés par A. Connes [15], [16] pour introduire les invariants S et Γ et classifier les algèbres de von Neumann. Ces invariants apparaissent lorsqu'on applique les concepts précédents aux représentations de $\mathbb{R}$ par les automorphismes modulaires de la théorie de Tomita.

Le spectre d'un vecteur vis-à-vis d'une représentation U de $\mathbb{R}^n$ et le support spectral de U étaient déjà considérés en mécanique et en physique théorique (voir par exemple [3], [4], [5], [6], [43], [44], [45]).

Enfin, si H est un espace de Hilbert, rappelons qu'aux représentations U de G sur H sont associées bijectivement les mesures de Stone E sur $\hat{G}$. Pour toute partie fermée F de $\hat{G}$, le sous- espace de H image de $E(F)$ est alors le sous-espace spectral associé à F . On voit donc que cette théorie des sous-espaces spectraux généralise celle des mesures de Stone sur $\hat{G}$ et en fournit un substitut. En particulier, elle fournit une théorie spectrale pour les opérateurs hermitiens sur un espace de Banach (voir [2]) ou pour les générateurs infinitésimaux des groupes à un paramètre d'isométries d'un espace de Banach.

L'application aux espaces assez divers que nous venons d'évoquer conduit à affaiblir les hypothèses de continuité usuellement considérées. Rappelons qu'une représentation U de G sur un espace vectoriel topologique X est dite équicontinue [10] si

1) $(U_g)_{g\in G}$ est une famille équicontinue sur X,

2) $g \longmapsto U_g x$ est continue de G dans X pour tout $x\in X$.

Ce sont là les conditions de continuité les plus couramment utilisées dans l'étude des représentations de G, mais cette théorie n'est pas toujours directement applicable aux situations considérées. Par exemple, si X est un espace de Banach, en transposant une telle représentation, la représentation ${}^tU : g \longmapsto {}^tU_g$ du groupe opposé $G°$ sur le dual X' de X, n'est pas toujours équicontinue. En effet, en général $({}^tU_g)_{g\in G}$ est une famille équicontinue pour la topologie normique de X', mais pour $x'\in X'$ l'application $g \longmapsto {}^tU_g x'$ n'est pas normiquement continue. Par contre cette application est continue pour $\sigma(X',X)$, mais $({}^tU_g)_{g\in G}$ n'est pas équicontinue pour $\sigma(X',X)$.

Ce genre de situation se rencontre notamment dans l'étude des automorphismes d'une algèbre de von Neumann M car M est le dual d'un espace de Banach M_* (prédual de M). Un tel cas a conduit W. Arveson à prendre un point de vue où, en fin de compte, on travaillerait avec deux topologies à la fois, l'une par rapport à laquelle la condition 1 précédente est vérifiée, l'autre pour laquelle la condition 2 est valable. Notons que ce genre de structure vectorielle bitopologique existe en théorie de l'intégration, où elle fut introduite par L. Schwartz pour étudier les mesures et probabilités cylindriques [39].

En se plaçant dans ce cadre de structure vectorielle bitopologique (décrite brièvement au paragraphe 1), on peut définir les représentations continues d'un groupe localement compact G (paragraphe 2). Avec des hypothèses adéquates, une telle représentation se prolonge par intégration à l'algèbre $M^1(G)$ des mesures bornées par G. Au paragraphe 3, on définit les sous-espaces spectraux d'une telle représentation dans le cas où G est commutatif, en utilisant l'analyse de Fourier. Au paragraphe 4 on montre que l'étude s'applique aux couples d'espaces de Banach en dualité métrique. Si (X,Y) est un tel couple, en équipant X de la topologie $\sigma(X,Y)$ et Y de la topologie $\sigma(Y,X)$ on obtient deux espaces vectoriels bitopologiques en dualité. Comme X et Y sont complets et tonnelés, l'étude générale des paragraphes 2 et 3 peut être précisée et poussée plus loin, ce qui est fait aux paragraphes 5 et 6.

Ces paragraphes 1 à 6 peuvent être considérés comme une première partie, développant la théorie générale des représentations continues sur un espace vectoriel bitopologique. Elle est inspirée avant tout de l'article de W. Arveson [1], et au paragraphe 6 de la thèse de A. Connes [15]. Les paragraphes 1,2,4 et 5 sont relativement formels et donnent le cadre général de cette étude. Le lecteur souhaitant prendre connaissance rapidement de cette théorie et de ses principaux résultats se reportera avant tout aux paragraphes 3 et 6.

La deuxième partie est consacrée aux représentations continues par automorphismes sur une algèbre d'opérateurs. Le paragraphe 7 étudie les propriétés de ces représentations dans le cadre plus général des algèbres de Banach bitopologiques. Les paragraphes 8 et 9 donnent les applications aux algèbres de von Neumann et aux C^*-algèbres qui illustraient l'article de W. Arveson déjà cité et qui furent développées et complétées par D. Olesen et G.K. Pedersen [28], [31], [32]. Le paragraphe 8 démontre essentiellement deux résultats : le théorème de Kadison-Sakai affirmant que toute dérivation D d'une algèbre de von Neumann M est intérieure (obtenu ici en étudiant le groupe à un paramètre $t \longmapsto \exp it\, D$ d'automorphismes de M) , et le théorème de Borchers énonçant que les représentations par automorphismes de $\mathbb{R}^n$ sur M induites par certaines représentations unitaires de $\mathbb{R}^n$ sont intérieures (obtenu à l'aide d'un lemme d'Araki non publié). Ces résultats sont utilisés au paragraphe 9 qui donne des analogues pour une C^*-algèbre. Les invariants S et Γ de A. Connes sont introduits aux paragraphes 7, 10 et 11, mais leur exploitation en vue de la classification des facteurs de von Neumann dépasse le cadre de cette étude (voir [15], [16]).

Chaque paragraphe est suivi de notes indiquant la provenance de ses principaux résultats. Il s'agit de renseignements très succincts qui ne sauraient constituer une bibliographie exhaustive.