Un entretien avec Bernard Malgrange

Propos recueillis par Philippe Eyssidieux le 30 novembre 2018.

Commençons par le commencement, ton origine familiale.

Je suis né dans une famille de moyenne bourgeoisie parisienne [1]. Le père et les deux oncles de ma mère étaient des polytechniciens. Dans la famille de mon père, c'étaient au contraire des hommes de loi, juristes, avocats. Sauf mon père qui a fait Centrale. J'ai fait classiquement mes études dans les meilleurs endroits possibles : Montaigne, Louis-Le-Grand, à l'École normale.

Qu'est-ce qui t'a amené à faire des maths ?

Comme j'étais le premier de la classe en maths, mon prof d'hypotaupe m'a dit « Vous devriez faire Normale » alors que je pensais faire l'X. À l'École en première année, j'ai hésité entre les maths et la physique. En maths, il y avait de bons cours. Cartan était absent mais Serre, qui était deux ans avant nous, nous servait de prof comme aux générations qui ont suivi. À l'époque, en physique à la Sorbonne, il y avait De Broglie et Rocard et les cours n'étaient pas terribles. Alors finalement au bout d'un an j'ai choisi les maths.

J'ai ensuite décidé de faire une thèse avec Schwartz. Schwartz était à la mode, la théorie des distributions venait de sortir en 48 ou 49. Les mathématiciens français étaient très enthousiastes aussi bien Weil, Cartan, Serre, etc.

On s'est mis à faire des équations aux dérivées partielles avec Schwartz qui entre parenthèses ne connaissait pas beaucoup plus que nous, ses élèves, le sujet, alors qu'il connaissait bien les probabilités. Les équations aux dérivées partielles, ça date au moins de D'Alembert mais au XIX^{e} siècle on avait regardé les équations elliptiques, hyperboliques, paraboliques du second ordre, et puis les problèmes de Dirichlet, de Cauchy et de Neumann essentiellement. Sauf un truc un peu à part qui est la géométrie différentielle à la Darboux-Cartan mais qui était fondé sur le théorème de Cauchy-Kowalewski donc uniquement réel-analytique donc ça ne te disait rien pour les fonctions C^∞ ou moins régulières. Les gens commençaient quand j'ai fait ma thèse à sortir du second ordre mais restaient dans les problèmes aux limites elliptiques, hyperboliques, paraboliques. Petrowski et Gårding s'étaient mis à regarder des problèmes aux limites hyperboliques d'ordre supérieur tout à fait généraux. Il y avait évidemment le travail de Leray sur Navier-Stokes qu'on admirait comme un monstre lointain. Le sujet était assez ouvert et on s'intéressait à des équations qui n'étaient ni elliptiques ni hyperboliques ni paraboliques, leurs solutions élémentaires et à quelles conditions toutes les solutions sont C^∞. On était très peu nombreux sur ces questions, les connaissances qu'il y avait à avoir étaient extrêmement limitées contrairement à maintenant.

C'est de ce moment que date le théorème de Malgrange-Ehrenpreis ? [2]

C'est le premier chapitre de ma thèse. Ehrenpreis et moi l'avons démontré indépendamment et essentiellement de la même manière par une méthode de variables complexes. J'avais d'abord cherché à l'aborder par la division des distributions [3], sans succès. Par contre, très peu de temps après Hör-

1. En 1928.

2. Existence d'une solution fondamentale pour une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants. Plus précisément, pour P un polynôme réel à n indéterminées $T_1,\ldots,T_n$, on note $P(D)$ l'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants obtenu en substituant $\frac{\partial}{\partial x_i}$ à l'indéterminée T_i. Une solution fondamentale est une distribution E telle que $P(D)E = \delta$ avec δ la masse de Dirac en l'origine.

3. Soit T une distribution à support compact définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et f une fonction analytique réelle définie sur Ω, il existe une distribution S à support compact sur Ω telle que $fS = T$. Voir B. Malgrange. Division des distributions, Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 203, p. 477-481.

mander a donné une démonstration complètement différente, ce qu'il appelle des intégrales d'énergie, des intégrations par parties pour montrer que si f est à support compact $P(D)f$ dans L^2 majore f dans L^2. La méthode était bien meilleure parce qu'elle s'applique à des équations à coefficients variables.

Si on parlait de tes cothésards à Nancy ?

On était trois ensemble pendant un an, Grothendieck, Lions et moi.

Lions et moi nous sommes dirigés vers les équations aux dérivées partielles. Lions étudiait des problèmes aux limites et puis plus tard il est passé dans les mathématiques appliquées. Il a créé une école considérable d'analyse appliquée, infiniment meilleure que ce qu'il y avait à l'époque. En EDP comme en probas, la frontière entre maths appliquées ou non est floue. Elle est très variable d'un pays à l'autre et d'une époque à l'autre. Les Allemands appelaient maths appliquées la mécanique dans les années 50. Au début du XIXe siècle du temps de Fourier, ce qu'on appelle maintenant maths appliquées s'appelait physique mathématique. Verdier disait à raison que la définition est sociologique et non pas mathématique.

Grothendieck à l'époque travaillait sur les espaces vectoriels topologiques. Il était très sympathique et avait déjà son côté un peu anarchiste. On était bons copains. Par la suite, j'ai regretté de ne pas l'avoir interrogé sur sa vie, comment il a vécu la guerre. Je le regrette mais maintenant évidemment je ne peux plus lui demander. C'est curieux dans les années 40 au début des années 50, on n'y pensait pas. Ça paraît étrange maintenant.

Il s'est mis très vite à autre chose que son sujet très limité. Il avait comme seconde thèse la théorie des faisceaux, sujet qui avait été donné par Cartan, fort judicieusement. Je me rappelle que dans le taxi en allant déjeuner chez Schwartz, Cartan corrigeait toutes les bêtises qu'il avait dites dessus pendant la soutenance. Un an après, il avait déjà publié Tôhoku [4] (Rires). Je me rappelle aussi une autre chose amusante. On avait un cours de Dieudonné sur le corps de classes alors, comme j'étais l'algébriste de service, j'étais chargé d'exposer les préliminaires donc j'ai enseigné la théorie de Galois à Grothendieck et à Lions. Ils comprenaient très bien mais ils ne savaient pas un mot d'algèbre. Je peux donc me vanter d'avoir eu Grothendieck comme élève en théorie de Galois.

Et l'élève a dépassé le maître (Rires). Comment as-tu poursuivi ?

La division des distributions a été faite simultanément par Hörmander et Łojaziewicz, 2-3 ans après ma thèse. Hörmander avait une méthode très brutale tandis que Łojaziewicz faisait une analyse beaucoup plus détaillée. Alors j'ai repris le travail de Łojaziewicz et je me suis aperçu que ça marchait pour des systèmes surdéterminés. On ne sait pas du tout traiter les systèmes surdéterminés (ayant plus d'équations que d'inconnues) d'équations aux dérivées partielles linéaires par les méthodes d'estimation a priori – sauf à coefficients constants. Encore maintenant, on est pratiquement à zéro dans ce sujet alors que quand il s'agit d'une équation ou d'un système carré on a des quantités énormes de résultats.

Je m'en suis servi aussi pour redémontrer le théorème d'Ehrenpreis sur les systèmes surdéterminés à coefficients constants. Mon idée d'utiliser la $\bar\partial$-cohomologie à conditions de croissance était nouvelle à l'époque et apportait une grande simplification par rapport aux méthodes d'Ehrenpreis. Ensuite, l'idée a été reprise et mon travail dépassé par les résultats définitifs de Hörmander que tu trouves dans le dernier chapitre de son livre d'analyse complexe [5].

Puis, il s'est trouvé tout à fait par hasard que les mêmes calculs m'ont permis de démontrer le théorème de préparation différentiable [6].

Je m'étais aperçu en faisant ces calculs de division des distributions en généralisant Łojaziewicz qu'il y avait des identités de la division (B. va au tableau et

4. A. Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique, II. Tohoku Math. J. (2) 9 (1957), nº 3, 119-221. Ce papier introduit la notion de catégorie abélienne, la suite spectrale de dérivation des foncteurs composés et beaucoup d'autres idées.

5. Voir L. Hörmander. An introduction to Complex Analysis in Several Variables. Second edition. North Holland (1973).

6. Soit f un germe à l'origine de fonction C^∞ des variables $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ tel qu'il existe un entier positif $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = \ldots = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial t^{k-1}}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(0,0) \neq 0$, on peut écrire $f(t,x) = c(t,x)(t^k + a_{k-1}(x)t^{k-1} + \ldots + a_0(x))$, les germes c et a_i étant C^∞ et $c(0,0) \neq 0$. Le théorème de division est l'énoncé que tout germe ϕ de fonction C^∞ satisfait à une identité de la division

$$\phi(t,x) = d(t,x)f(t,x) + b_{k-1}(x)t^{k-1} + \ldots + b_0(x)$$

les germes d et b_i étant C^∞ et uniquement déterminés. Pour les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, ce résultat classique est dû à Weierstrass. Il entre dans les fondements de la géométrie analytique locale et les analogues en géométrie algébrique jouent aussi un tel rôle.