ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 46 fascicule 6 novembre-décembre 2013

ANNALES
SCIENTIFIQUES
de
L'ÉCOLE
NORMALE
SUPÉRIEURE

Nicolas BURQ & Gilles LEBEAU

Injections de Sobolev probabilistes et applications

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^{e} série, t. 46, 2013, p. 917 à 962

INJECTIONS DE SOBOLEV PROBABILISTES ET APPLICATIONS

PAR NICOLAS BURQ ET GILLES LEBEAU

RÉSUMÉ. – On démontre dans cet article des versions probabilistes des injections de Sobolev sur une variété riemannienne compacte, (M, g). Plus précisément on démontre que pour des mesures de probabilité naturelles sur l'espace $L^2(M)$, presque toute fonction appartient à tous les espaces $L^p(M)$, $p < +\infty$. On donne ensuite des applications à l'étude des harmoniques sphériques sur la sphère $\mathbb{S}^d$: on démontre (encore pour des mesures de probabilité naturelles) que presque toute base hilbertienne de $L^2(\mathbb{S}^d)$ formée d'harmoniques sphériques a tous ses éléments uniformément bornés dans tous les espaces $L^p(\mathbb{S}^d), p < +\infty$. On démontre aussi des résultats similaires sur les tores $\mathbb{T}^d$. On donne aussi une application à l'étude du taux de décroissance de l'équation des ondes amortie dans un cadre où la condition de contrôle géométrique de Bardos, Lebeau et Rauch n'est pas vérifiée. En supposant le flot ergodique, on démontre qu'il existe sur des ensembles de mesure arbitrairement proche de 1 (dans l'espace des données initiales d'énergie finie), un taux de décroissance uniforme. Finalement, on conclut avec une application à l'étude de l'équation des ondes semi-linéaire H^1-surcritique, pour laquelle on démontre que pour presque toute donnée initiale, les solutions faibles sont fortes et uniques (localement en temps).

ABSTRACT. – In this article, we give probabilistic versions of Sobolev embeddings on any Riemannian manifold (M, g). More precisely, we prove that for natural probability measures on $L^2(M)$, almost every function belongs to all spaces $L^p(M), p < +\infty$. We then give applications to the study of the growth of the L^p norms of spherical harmonics on spheres $\mathbb{S}^d$: we prove (again for natural probability measures) that almost every Hilbert base of $L^2(\mathbb{S}^d)$ made of spherical harmonics has all its elements uniformly bounded in all $L^p(\mathbb{S}^d), p < +\infty$ spaces. We also prove similar results on tori $\mathbb{T}^d$. We give then an application to the study of the decay rate of damped wave equations in a framework where the geometric control property of Bardos-Lebeau-Rauch is not satisfied. Assuming that it is violated for a measure 0 set of trajectories, we prove that there exists almost surely a rate. Finally, we conclude with an application to the study of the H^1-supercritical wave equation, for which we prove that for almost all initial data, the weak solutions are strong and unique, locally in time.

1. Introduction

L'objet de cet article est de démontrer que, si on choisit des fonctions au hasard sur une variété compacte, pour des mesures de probabilité naturelles, alors il est possible d'améliorer grandement les injections de Sobolev classiques. Plus précisément notre cadre est le suivant. Soit (M, g) une variété riemannienne lisse compacte, sans bord connexe de dimension d et $\mathbf{\Delta}$ le laplacien sur (M, g). Soit $0 = \omega_0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots$ le spectre de $\sqrt{-\mathbf{\Delta}}$ et $(e_j)_{j\geq 0}$ une base orthonormale L^2 de fonctions propres réelles, de sorte que $-\mathbf{\Delta} e_j = \omega_j^2 e_j$. Soient $0 < a < b$ et E_h le sous-espace de $L^2(M)$

$$E_h = \{u = \sum_{k\in I_h} z_k e_k(x),\ z_k \in \mathbb{C}\}, \quad I_h = \{k,\ h\omega_k \in]a, b]\}. \tag{1.1}$$

Soit $N_h = \dim(E_h)$. D'après la formule de Weyl, avec reste précisé (voir [18, Theorem 1.1]), on a pour $h \in]0, 1]$

$$N_h = (2\pi h)^{-d}\mathrm{Vol}(M)\mathrm{Vol}(S^{d-1}) \int_{(a,b)} \rho^{d-1} d\rho + O(h^{-d+1}). \tag{1.2}$$

Rappelons qu'il existe une constante C indépendante de $h \in]0, 1]$ telle qu'on a

$$\|u\|_{L^\infty(M)} \leq Ch^{-d/2}\|u\|_{L^2(M)} \quad \forall u \in E_h \tag{1.3}$$

et que plus généralement, si $A(x, hD_x)$ est un opérateur h-pseudodifférentiel classique sur M de degré 0 et à support essentiel contenu dans $\{(x, \xi) \in T^*M,\ |\xi|_x \leq L\}$ pour un $L < \infty$, il existe une constante C indépendante de $h \in]0, 1]$ telle que pour tout $1 \leq p \leq r \leq \infty$, on a

$$\|A(x, hD_x)g\|_{L^r(M)} \leq Ch^{-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\|g\|_{L^p(M)} \quad \forall g \in L^p(M). \tag{1.4}$$

Les inégalités de Sobolev (1.3) ou (1.4) sont optimales. L'objectif de cet article est d'étudier des versions probabilistes de ces inégalités. Décrivons rapidement le type de résultats que nous obtenons :

On note S_h (resp. $\widetilde{S}_h$) la sphère unité de l'espace euclidien $E_h = \mathbb{C}^{N_h}$ (resp. $\widetilde{E}_h = \mathbb{R}^{N_h}$), et P_h (resp. $\widetilde{P}_h$) la probabilité uniforme sur S_h (resp. $\widetilde{S}_h$). On verra dans la section 2 (voir en particulier le théorème 3) que les probabilités P_h et $\widetilde{P}_h$ sont associées à une répartition uniforme de l'énergie dans l'espace de phase T^*M pour la mesure de Liouville canonique $d\lambda$ sur T^*M. On notera $\mathbb{E}_h(f) = \int_{S_h} f(u)dP_h$ l'espérance d'une variable aléatoire f, et Π_h le projecteur orthogonal de $L^2(M)$ sur E_h.

On a alors le résultat probabiliste essentiellement classique suivant, qui estime la mesure des $u \in E_h$ de grande norme L^∞ (on pourra consulter Kahane [22] pour des résultats du même type).

THÉORÈME 1. – *Pour tout* $c_2 < \mathrm{Vol}(M)$, *il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $h \in]0, 1]$ *et tout* $\Lambda \geq 1$ *on ait, avec* $c_1 = d(1 + d/2)$

$$\begin{aligned} &P_h\big(u \in S_h,\ \|u\|_{L^\infty} > \Lambda\big) \leq Ch^{-c_1}e^{-c_2\Lambda^2}, \\ &\widetilde{P}_h\big(u \in \widetilde{S}_h,\ \|u\|_{L^\infty} > \Lambda\big) \leq Ch^{-c_1}e^{-c_2\Lambda^2}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Nous donnerons une preuve du théorème 1 dans la section 2. L'estimation (1.5) a une conséquence immédiate sur les versions probabilistes des injections de Sobolev. Rappelons que pour $p \in [1, \infty]$ et $s \geq 0$, l'espace de Sobolev $W^{s,p}$ est défini par

$$W^{s,p} = \{f \in L^p(M),\ (1 - \mathbf{\Delta})^{s/2} f \in L^p(M)\}. \tag{1.6}$$

Les espaces $W^{s,p}$ sont indépendants du choix de la métrique g sur M et, pour $1 \leq p \leq r < \infty$, on a les injections de Sobolev

$$W^{s,p} \subset L^r, \quad s = \frac{d}{p} - \frac{d}{r}. \tag{1.7}$$

Rappelons aussi la construction de Littlewood-Paley. On fixe $0 < a < c$, et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(t) = 0$ pour $t \leq a$, $\varphi(t) = 1$ pour $t \geq c$, et $\varphi'(t) > 0$ pour $t \in\ ]a, c[$. On pose $\psi_{-1}(t) = 1 - \varphi(t)$, $\psi(t) = \varphi(t) - \varphi(t/2)$, $\psi_n(t) = \psi(2^{-n}t)$ pour $n \geq 0$. Alors ψ est à support dans $[a, 2c]$, $\psi(t) > 0$ pour $t \in\ ]a, 2c[$ et $1 = \sum_{n \geq -1} \psi_n(t)$ pour tout t. Posons $b = 2c > a > 0$. Pour toute distribution $f \in \mathcal{D}'(M)$, on a $f = \sum c_k(f) e_k$, où les $c_k(f) = \int_M f e_k dx$ sont les coefficients de Fourier de f, et la décomposition de Littlewood-Paley de f s'écrit, avec $h_k = 2^{-k}$,

$$f = \sum_{n=-1}^{\infty} f_n, \quad f_n = \psi_n(\sqrt{|\mathbf{\Delta}|}) f = \sum_k \psi_n(\omega_k) c_k(f) e_k,\ f_n \in E_{h_n}\ (n \geq 0). \tag{1.8}$$

Rappelons que, pour $q, r \in [1, \infty]$ et $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Besov $B^s_{q,r}$ est l'espace des distributions $f \in \mathcal{D}'(M)$ dont la décomposition de Littlewood-Paley vérifie

$$\text{la suite } n \to 2^{ns} \|f_n\|_{L^q(M)} \text{ appartient à } l^r(\mathbb{N}). \tag{1.9}$$

Les éléments de E_{h_n} sont des fonctions à échelle $h_n = 2^{-n}$ sur M, et les injections de Sobolev (1.7) peuvent être vues comme conséquence des inégalités (1.4).

Soit alors X l'espace produit

$$X = \Pi_{n=0}^{\infty} S_{h_n}. \tag{1.10}$$

On munit X de la probabilité produit $\mathbb{P} = \Pi_{n=0}^{\infty} P_{h_n}$. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_n n^{1/2} a_n < \infty$. Soit j l'application de X dans l'espace de Besov $B^0_{2,\infty}$

$$\begin{aligned} X &\to B^0_{2,\infty} \\ g = (g_n)_{n \geq 0} &\mapsto j(g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Comme corollaire immédiat du théorème 1, on obtient

Corollaire 1.1. – *On a* $\mathbb{P}(j(g) \in C^0(M)) = 1$.

Remarque 1.2. – *On notera que le corollaire 1.1 est violent, puisqu'il implique en particulier une injection presque sûre de* $B^\sigma_{2,\infty}$ *dans* $C^0(M)$ *pour tout* $\sigma > 0$, *soit un gain de* $d/2$ *dérivées par rapport à l'injection de Sobolev.*

Démonstration. – Soit $A > 0$ donné, $m_n = (An\log(2))^{1/2}$ et B_n la partie de $S_{2^{-n}}$

$$B_n = \{g_n,\ \|g_n\|_{L^\infty} \le m_n\}.$$

D'après (1.5) on a

$$P_{h_n}(B_n) \ge 1 - C2^{-n(c_2A-c_1)}. \tag{1.12}$$

Soit B la partie de X, $B = S_{h_0} \times \Pi_{n=1}^{\infty} B_n$. Pour $g = (g_n) \in B$ et $f = j(g)$, on a

$$\|f\|_{L^\infty} \le \sum_{n=0}^{\infty} a_n \|g_n\|_{L^\infty} \le Ca_0 + (A\log(2))^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/2} a_n. \tag{1.13}$$

On a alors pour tout $f \in j(B)$, $f \in C^0(M)$ d'après (1.13), puisque les g_n sont continus, et d'après (1.12)

$$\mathbb{P}(B) = \prod_{n=1}^{\infty} P_{h_n}(B_n) \ge \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - C2^{-n(c_2A-c_1)}\right) \ge 1 - \varepsilon,$$

avec $\varepsilon > 0$ petit si la constante A est assez grande, d'où le résultat. □

La morale du corollaire 1.1 est la suivante : si on se donne une famille de fonctions $g_h \in E_h$ à échelle h et d'énergie 1 pour tout $h = 2^{-n}$, et si on re-répartit leur énergie aléatoirement dans l'espace de phase, on obtient une nouvelle famille de fonctions dans E_h qui est « presque » bornée dans le sens où $\sup_h \|g_h\|_{L^\infty} |\log(h)|^{-1/2}$ l'est .

Nos constructions de mesures sur l'espace $L^2(M)$ (voir l'appendice C pour la construction précise) utilisent une décomposition orthogonale $L^2(M) = \oplus_k E_k$, où les E_k sont des sous-espaces de dimensions finies invariants par l'opérateur $\boldsymbol{\Delta}$. On choisit en particulier sur chaque E_k une probabilité P_k invariante par les isométries de E_k, et on munit l'espace L^2 de la probabilité produit $P = \Pi_k P_k$. Dans notre cadre, si ω est la fréquence typique des éléments de E_k, on a toujours $C_1\omega^{d-1} \le \dim(E_k) \le C_2\omega^d$, et plus précisément, les fréquences ω des éléments de E_k vérifient $\omega \in (a_k, b_k), a_k + C \le b_k \le ca_k$, avec $C > 0, c > 1$. Le fait de choisir des espaces E_k de « grande dimension » permet d'obtenir des résultats plus forts avec probabilité 1 que le choix $E_k = \mathbb{C}e_k$, qui vérifie $\dim(E_k) = 1$, et pour lequel nous renvoyons aux travaux de N. Tzvetkov [3], [35] et [36]. De plus, on verra dans la section 2 comment le choix que nous faisons des E_k permet de relier naturellement nos probabilités à la mesure de Liouville sur T^*M.

L'article est organisé comme suit. Dans la section 2 nous démontrons le théorème 1 et des versions précisées, en autorisant des localisations spectrales plus fines que (1.1). Le théorème 3 de la section 2.2 précise le fait que nos mesures sont associées à la mesure de Liouville sur T^*M. Dans la section 2.3 nous décrivons pour $2 < q \le \infty$ les estimations L^q presque sûres. On trouvera dans Shiffman-Zelditch [29] des preuves analogues pour les estimées sur les sections de fibrés holomorphes. Les bornes inférieures que nous obtenons sur les médianes des normes L^q semblent nouvelles. Dans les sections suivantes, nous donnons des applications simples à l'étude de solutions d'équations aux dérivées partielles. Notre première application (dans la section 3) concerne la croissance des normes L^p des harmoniques sphériques (les fonctions propres du laplacien sur les spheres $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$). Il est connu depuis les travaux de Hörmander [18] et de Sogge [32] que sur toute variété riemannienne compacte de dimension d, (M, g), les fonctions propres du laplacien vérifient les estimations suivantes.