ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 47 fascicule 1 janvier-février 2014

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Joseph AYOUB

La réalisation étale et les opérations de Grothendieck

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4[e] série, t. 47, 2014, p. 1 à 145

LA RÉALISATION ÉTALE ET LES OPÉRATIONS DE GROTHENDIECK

PAR JOSEPH AYOUB

Résumé. – Dans cet article, nous construisons des foncteurs de réalisation étale définis sur les catégories $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(X, \Lambda)$ des motifs étales (sans transferts) au-dessus d'un schéma X. Notre construction est naturelle et repose sur un théorème de rigidité relatif à la Suslin-Voevodsky que nous devons établir au préalable. Nous montrons ensuite que ces foncteurs sont compatibles aux opérations de Grothendieck et aux foncteurs « cycles proches ». Au passage, nous démontrons un certain nombre de propriétés concernant les motifs étales.

Abstract. – In this article, we construct étale realization functors defined on the categories $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(X, \Lambda)$ of étale motives (without transfers) over a scheme X. Our construction is natural and relies on a relative rigidity theorem à la Suslin-Voevodsky that we will establish first. Then, we show that these realization functors are compatible with Grothendieck operations and the "nearby cycles" functors. Along the way, we prove a number of properties concerning étale motives.

Table des matières

L'auteur a bénéficié du soutien partiel du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique (NSF), projet no. 200021-124737/1.

Introduction

Soient k un corps parfait et n un entier inversible dans k. On note $\mathbf{DM}(k,\Lambda)$ la catégorie des motifs de Voevodsky sur k à coefficients dans un anneau commutatif Λ. Le théorème de rigidité de Suslin-Voevodsky (cf. [30, Th. 7.20 et Th. 9.35]) fournit une construction simple et naturelle de la réalisation étale à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. C'est la suivante. Étant donné un motif $M \in \mathbf{DM}(k,\mathbb{Z})$, on peut former le motif étale à coefficients finis $\mathsf{a}_{\text{ét}}(M \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \in \mathbf{DM}^{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ obtenu en tensorisant M par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et en faisceautisant pour la topologie étale. D'après le théorème de rigidité de Suslin-Voevodsky on dispose d'une équivalence de catégories $\mathsf{L}\iota^* : \mathbf{D}(\mathbf{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{Et}/k,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \simeq \mathbf{DM}^{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. L'image de $\mathsf{a}_{\text{ét}}(M \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ par un quasi-inverse de $\mathsf{L}\iota^*$ est un complexe de faisceaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules sur Et/k, le petit site étale de k. C'est donc essentiellement un complexe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules muni d'une action continue du groupe de Galois absolu de k. Ce complexe est la *réalisation étale* de M.

L'objectif de cet article est d'obtenir une version relative de la construction esquissée ci-dessus, et de vérifier que les foncteurs de réalisation qu'on obtient sont compatibles aux opérations de Grothendieck et aux foncteurs « cycles proches ». Pour ce faire, nous devons établir au préalable une version relative du théorème de rigidité de Suslin-Voevodsky. Plus précisément, nous devons prouver que le foncteur évident $\mathsf{L}\iota^* : \mathbf{D}(\mathbf{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{Et}/S,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \longrightarrow \mathbf{DM}^{\text{ét}}(S,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est une équivalence de catégories pour des schémas S suffisamment généraux. Malheureusement, une preuve directe semble difficile et la tentative naïve de ramener le cas général à celui connu où la base est le spectre d'un corps parfait est vouée à l'échec puisque l'axiome de localité pour les catégories de Voevodsky n'est pas disponible dans une généralité suffisante. On est donc naturellement amené à travailler avec les catégories $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(S,\Lambda)$, la variante sans transferts de la catégorie des motifs étales sur S. Pour ces catégories, l'axiome de localité est connu (cf. [5, Cor. 4.5.44]) et on verra qu'elles vérifient toutes les propriétés requises et notamment la variante relative du théorème de rigidité de Suslin-Voevodsky. De plus, on a un foncteur évident $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(S,\Lambda) \longrightarrow \mathbf{DM}^{\text{ét}}(S,\Lambda)$ qui est souvent une équivalence de catégories (cf. l'annexe B). On ne fait donc que gagner en travaillant avec les catégories $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(S,\Lambda)$.

Passons en revue le contenu de l'article.

Le théorème de rigidité relatif. – Notre première tâche est d'obtenir une version relative du théorème de rigidité de Suslin-Voevodsky pour les catégories $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(-,\Lambda)$. Précisons de quoi il s'agit. Pour un schéma S, on dispose d'un foncteur

$$\mathsf{L}\iota^* : \mathbf{D}(\mathbf{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{Et}/S,\Lambda)) \longrightarrow \mathbf{DA}^{\text{ét}}(S,\Lambda) \tag{1}$$

induit par l'inclusion $\mathrm{Et}/S \hookrightarrow \mathrm{Sm}/S$ de la catégorie des S-schémas étales dans celle des S-schémas lisses. (Ce foncteur est noté $\mathsf{L}\hat{\iota}^*_S$ dans le corps du texte.) L'énoncé optimal d'un théorème de rigidité relatif à la Suslin-Voevodsky serait que le foncteur $\mathsf{L}\iota^*$ ci-dessus est une équivalence de catégories si Λ est une $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-algèbre avec n un entier inversible dans $\mathcal{O}_S$. C'est ce que nous démontrerons modulo une condition technique sur S qui est toujours vérfiée en pratique. Pour un énoncé précis, on renvoie le lecteur au théorème 4.1.

Notre preuve du théorème de rigidité relatif utilise la propriété de *semi-séparation* pour les catégories $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(-,\Lambda)$ (cf. le théorème 3.9). Cette propriété a été introduite dans [4] dans le cadre d'un 2-foncteur homotopique stable général H. On dit que H est semi-séparé si le foncteur $e^* : \mathsf{H}(X) \longrightarrow \mathsf{H}(X')$ est une équivalence de catégories pour tout $e : X' \longrightarrow X$ fini, surjectif et totalement inséparable. Les sections 1 et 2 sont consacrées à la notion de semi-séparation. On y travaille dans le cadre abstrait d'un 2-foncteur homotopique stable H sur une base S ; le but étant d'identifier des conditions simples qui assurent que H est semi-séparé. On y arrive en deux temps. D'abord, on introduit la condition **(SS$_p$)**, avec p un nombre premier, et on montre qu'elle entraîne que H est semi-séparé si de plus S est le spectre d'un corps parfait de caractéristique p (cf. le théorème 1.2 pour un énoncé précis). Ceci est l'objectif de la section 1. La preuve repose d'une manière essentielle sur le formalisme des quatre opérations de Grothendieck comme il a été développé dans [4, Chap. 1]. Ensuite, dans la section 2, on démontre que la condition **(SS$_p$)** est une conséquence de deux autres conditions faciles à imposer, à savoir :

1. H est $\mathbb{Z}[1/2p]$-linéaire ;
2. le foncteur e^* est conservatif si e un revêtement étale d'ordre 2.

C'est le théorème 2.8 qui s'applique à $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(-,\Lambda)$ dès que Λ est une $\mathbb{Z}[1/2]$-algèbre. Fort heureusement, pour le 2-foncteur homotopique stable $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(-,\Lambda)$, une méthode directe basée sur des résultats de F. Morel [32, 35] permet de vérifier la condition **(SS$_p$)** sans hypothèse sur Λ ; ceci est expliqué dans l'annexe C.

La preuve proprement dite du théorème de rigidité relatif occupe la section 4. On démontre d'abord que (1) est une équivalence de catégories lorsque S est le spectre d'un corps de p-dimension cohomologique finie pour les nombres premiers p pertinents. C'est le lemme 4.6. À part la propriété de semi-séparation, un ingrédient essentiel dans la preuve de ce cas particulier est le théorème de rigidité de Röndigs et Østvær [42, Th. 1.1] qu'on adapte aux motifs étales. Le reste de la preuve consiste à se battre pour ramener le cas d'une base générale à celui où la base est le spectre d'un corps ; notre outil principal étant le triangle de localisation (cf. [5, Cor. 4.5.44]) dans les catégories $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(-,\Lambda)$.

La réalisation étale et les opérations de Grothendieck. – Une fois que la version relative du théorème de rigidité de Suslin-Voevodsky est démontrée, il est aisé de construire des foncteurs de réalisation étale $\mathfrak{R}_S^{\text{ét}} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{Et}/S,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ par la méthode esquissée au début de l'introduction. Bien entendu, on doit supposer certaines conditions et il est possible d'utiliser des anneaux de coefficients plus généraux. On peut aussi définir une variante ℓ-adique à la Ekedahl. Ces constructions font l'objet de la section 5.

Ensuite, on s'intéresse dans la section 6 aux compatibilités des foncteurs de réalisation étale avec les six opérations de Grothendieck, à savoir les quatre foncteurs f^*, f_*, $f_!$ et $f^!$ associés aux morphismes quasi-projectifs, ainsi qu'aux bifoncteurs $-\otimes-$ et $\underline{\mathsf{Hom}}(-,-)$. En gros, tout fonctionne bien et on a les isomorphismes de commutation que l'on pense lorsque certaines conditions techniques, souvent satisfaites en pratique, sont supposées.

Enfin, dans la section 9, on explique comment obtenir des réalisations étales définies sur les motifs à coefficients rationnels. Plus précisément, pour tout nombre premier ℓ, on définit un foncteur $\mathfrak{R}_S^{\text{ét}} : \mathbf{DA}_{\text{ct}}^{\text{ét}}(S, \mathbb{Q}) \longrightarrow \hat{\mathbf{D}}_{\text{ct}}^{\text{ét}}(S, \mathbb{Q}_\ell)$ où $\mathbf{DA}_{\text{ct}}^{\text{ét}}(S, \mathbb{Q})$ est la sous-catégorie des motifs constructibles à coefficients rationnels et $\hat{\mathbf{D}}_{\text{ct}}^{\text{ét}}(S, \mathbb{Q}_\ell)$ est la catégorie dérivée des faisceaux ℓ-adiques sur S. Bien entendu, certaines conditions techniques doivent être satisfaites. Nous renvoyons le lecteur à la section 9 pour les énoncés précis. Ensuite, nous vérifions que ces foncteurs de réalisation commutent aux six opérations de Grothendieck. Si la construction de la réalisation étale à coefficients rationnels est une extension facile des constructions de la section 5, l'énoncé de cette commutation suppose le théorème de constructibilité des quatre opérations f^*, f_*, $f_!$ et $f^!$ (cf. le théorème 8.10), et des opérations $- \otimes -$ et $\underline{\mathsf{Hom}}(-, -)$ (cf. le théorème 8.12). C'est pour cette raison que la réalisation étale à coefficients divisibles a été repoussée à la suite des sections 7 et 8.

Motifs et cycles proches. – Dans la section 10, on se propose d'étudier la compatibilité de la réalisation étale avec le formalisme des cycles évanescents. Dans la section 11 on pousse cette étude un cran plus loin en montrant une compatibilité avec, d'une part, l'opérateur de monodromie sur la partie unipotente du motif proche et, d'autre part, l'action de monodromie sur les cycles proches modérés.

Les foncteurs « motif proche » ont été construits et étudiés dans [5, Chap. 3]. Toutefois, une grande partie de la théorie était confinée à la caractéristique résiduelle nulle. Motivés par des applications arithmétiques potentielles, nous nous sommes efforcés dans la section 10 d'étendre la théorie des motifs proches au-dessus d'un anneau de valuation discrète de caractéristique résiduelle positive. Cette extension est désormais possible grâce à la pureté absolue pour les catégories $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(-, \Lambda)$ obtenue dans la section 7 en se basant sur des résultats de Gabber, de Quillen et de Morel-Voevodsky, et en s'inspirant de la méthode de Cisinski-Déglise [11].

Soient S le spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien et $f : X \longrightarrow S$ un S-schéma quasi-projectif. On note X_η et X_σ les fibres génériques et spéciales de X. On dispose alors de deux foncteurs

$$\Upsilon_f,\ \Psi_f^{\text{mod}} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{DA}^{\text{ét}}(X_\sigma, \Lambda).$$

Si $M \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda)$, alors $\Upsilon_f(M)$ est la partie du motif proche de M sur laquelle la monodromie est unipotente et $\Psi_f^{\text{mod}}(M)$ est la partie du motif proche de M sur laquelle la monodromie est modérée. Lorsque S est d'égale caractéristique nulle, on retrouve respectivement les foncteurs Υ_f et Ψ_f de [5, §3.4 et §3.5]. (On fera attention que les foncteurs Υ_f ne sont raisonnables qu'à coefficients rationnels alors que les foncteurs Ψ_f^{mod} se comportent bien en inversant les nombres premiers problématiques.) Lorsque la caractéristique résiduelle de S est non nulle, on construit un troisième foncteur $\Psi_f : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{DA}^{\text{ét}}(X_{\overline{\sigma}}, \Lambda)$ où $X_{\overline{\sigma}}$ est la fibre géométrique au-dessus du point fermé de S. Si $M \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}(X_\eta, \Lambda)$, alors $\Psi_f(M)$ est le motif proche total de M.

Sous certaines conditions techniques, nous construisons aussi des isomorphismes de comparaison $\mathfrak{R}_{X_\sigma}^{\text{ét}} \circ \Psi_f^{\text{mod}} \simeq \Psi_f^{\text{mod}} \circ \mathfrak{R}_{X_\eta}^{\text{ét}}$ et $\mathfrak{R}_{X_{\overline{\sigma}}}^{\text{ét}} \circ \Psi_f \simeq \Psi_f \circ \mathfrak{R}_{X_\eta}^{\text{ét}}$ qui font le lien entre le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique et celui en cohomologie étale.