Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 49, 2016, p. 947 à 970

THÉORIE DE SEN ET VECTEURS LOCALEMENT ANALYTIQUES

PAR LAURENT BERGER AND PIERRE COLMEZ

RÉSUMÉ. – Nous généralisons la théorie de Sen à des extensions K_∞/K dont le groupe de Galois est un groupe de Lie p-adique de dimension quelconque. Pour cela, nous remplaçons l'espace des vecteurs K-finis de Sen par celui des vecteurs localement analytiques de Schneider et Teitelbaum. On obtient alors un espace vectoriel sur le corps des vecteurs localement analytiques de $\hat{K}_\infty$. Nous décrivons ce corps en portant une attention particulière au cas d'une extension de Lubin-Tate.

ABSTRACT. – We generalize Sen theory to extensions K_∞/K whose Galois group is a p-adic Lie group of arbitrary dimension. To do so, we replace Sen's space of K-finite vectors by Schneider and Teitelbaum's space of locally analytic vectors. One then gets a vector space over the field of locally analytic vectors of $\hat{K}_\infty$. We describe this field in general and pay special attention to the case of Lubin-Tate extensions.

1. Introduction

1.1. Descente presque étale

On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$ et on note $\mathbf{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour la norme p-adique.

Si K est une extension finie[(1)] de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$, et si $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$, une idée qui s'est avérée fructueuse pour l'étude des représentations p-adiques de G_K, est de dévisser $\overline{\mathbf{Q}}_p$ en introduisant une extension intermédiaire $K \subset K_\infty \subset \overline{\mathbf{Q}}_p$, telle que K_∞/K ne soit pas trop compliquée, mais quand même profondément ramifiée (voir [11]) de telle sorte que $\overline{\mathbf{Q}}_p/K_\infty$ soit presque étale au sens de Faltings. On note H_K le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K_\infty)$ et, si K_∞ est une extension galoisienne de K, on note Γ_K le groupe $\mathrm{Gal}(K_\infty/K) = G_K/H_K$. Le fait que l'extension $\overline{\mathbf{Q}}_p/K_\infty$ est presque étale a pour conséquence le résultat de descente presque étale suivant (cf. [31]).

(1) Plus généralement, on peut prendre pour K une extension finie de $W(k)[1/p]$ où k est un corps parfait de caractéristique p, et pour $\mathbf{C}_p$ le complété p-adique de $\overline{K}$.

THÉORÈME 1.1. – *Si $d \geqslant 1$, alors $H^1(H_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{C}_p)) = \{1\}$.*

REMARQUE 1.2. – (i) D'après le théorème d'Ax-Sen-Tate, $\mathbf{C}_p^{H_K}$ est l'adhérence $\hat{K}_\infty$ de K_∞ dans $\mathbf{C}_p$ (autrement dit, c'est le complété de K_∞ pour la norme p-adique). Le th. 1.1 se traduit par le fait que, si X est une $\mathbf{C}_p$-représentation semi-linéaire de dimension finie d de G_K (par exemple si $X = \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, où V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation linéaire de G_K, de dimension d), l'application $\mathbf{C}_p \otimes_{\hat{K}_\infty} X^{H_K} \to X$ est un isomorphisme. En particulier, si K_∞/K est galoisienne, $W = X^{H_K}$ est une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension d de Γ_K. On est donc naturellement amené à étudier les $\hat{K}_\infty$-représentations semi-linéaires de dimension finie de Γ_K pour associer des invariants aux $\mathbf{Q}_p$-représentations linéaires de G_K ; c'est exactement ce qu'a fait Sen [31, 34] pour définir les poids de Hodge-Tate d'une représentation quelconque (cf. rem. 1.4 ci-dessous).

(ii) On a le même genre d'énoncé en remplaçant $\mathbf{C}_p$ par $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ [18] ou par $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ [9, 4] ou encore par $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}$ [13, 2, 16] (et $\hat{K}_\infty$ par les points fixes par H_K de l'anneau correspondant).

On peut, par exemple, prendre pour K_∞ une des extensions suivantes :

— l'extension cyclotomique $K(\mu_{p^\infty})$;

— l'extension de Kummer $K(\sqrt[p^\infty]{\pi})$, où π est une uniformisante de K ;

— la composée $K(\mu_{p^\infty}, \sqrt[p^\infty]{\pi})$ des deux extensions précédentes ;

— une extension de type Lubin-Tate, obtenue en rajoutant à K les points de p^∞-torsion d'un groupe de Lubin-Tate associé à une uniformisante d'un sous-corps de K ;

— une extension galoisienne infiniment ramifiée de groupe de Galois un groupe de Lie p-adique (qui est alors profondément ramifiée, cf. [29] et [11]).

Chacun des exemples ci-dessus a son intérêt propre :

• L'extension la plus utilisée est l'extension cyclotomique, par exemple dans la théorie des (φ, Γ)-modules (cf. [17] et [9]), mais pour beaucoup de questions, il semble naturel d'utiliser d'autres extensions.

• De beaucoup de points de vue, la plus simple serait l'extension de Kummer mais elle n'est pas galoisienne, ce qui pose de sérieux problèmes (elle s'est quand même révélée très utile pour l'étude des représentations semi-stables [7, 22, 1]) et on lui préfère parfois [35, 8] la composée $K(\mu_{p^\infty}, \sqrt[p^\infty]{\pi})$.

• En vue d'une extension de la correspondance de Langlands locale p-adique à $\mathrm{GL}_2(K)$, il semble naturel de considérer une extension de Lubin-Tate associée à une uniformisante de K [23, 20, 3] car cela rend la correspondance pour $\mathrm{GL}_1(K)$ complètement transparente.

• Enfin, pour des applications à la théorie d'Iwasawa non commutative [21, 10, 36], le cadre naturel est celui d'une extension de groupe de Galois un groupe de Lie p-adique arbitraire (ce qui inclut tous les cas précédents à l'exception de l'extension de Kummer).

Malheureusement, si Γ_K est de dimension $\geqslant 2$, certains outils fondamentaux de la théorie cyclotomique manquent à l'appel (comme l'existence des traces normalisées continues sur K_∞ de [33]), ce qui rend la théorie nettement plus délicate, et explique qu'elle soit moins développée. Le but de cet article et de [3] est de suggérer que l'on peut remplacer ces outils manquants par des éléments de la théorie des représentations de Γ_K : le concept de vecteur localement analytique est utilisé dans cet article pour étendre la théorie de Sen ; dans [3], ce concept permet de définir des invariants palliant le manque de surconvergence des (φ, Γ)-modules dans le cas d'une extension de Lubin-Tate.

Dans tout le reste de l'article, *on suppose que K_∞/K est galoisienne, que $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ est un groupe de Lie p-adique, et que le sous-groupe d'inertie de Γ_K est infini* (c'est automatique si $\dim \Gamma_K \geqslant 2$).

1.2. Vecteurs K-finis

Soit W une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension finie de Γ_K. Si $w \in W$, disons que w est *K-fini* s'il appartient à un sous K-espace vectoriel de dimension finie de W qui est stable par Γ_K. Soit W^{fin} l'ensemble des vecteurs K-finis de W. C'est un sous-K_∞-espace vectoriel de W.

Si $\dim \Gamma_K = 1$, on dispose du résultat suivant de Sen (cf. [31]).

THÉORÈME 1.3. – *On a $\hat{K}_\infty^{\mathrm{fin}} = K_\infty$ et, plus généralement, si W est une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension finie de Γ_K, l'application $\hat{K}_\infty \otimes_{K_\infty} W^{\mathrm{fin}} \to W$ est un isomorphisme.*

REMARQUE 1.4. – (i) L'algèbre de Lie de Γ_K agit linéairement sur le K_∞-espace vectoriel W^{fin}. Cette algèbre est de rang 1 sur $\mathbf{Z}_p$ et, si K_∞/K est l'extension cyclotomique, elle admet un générateur canonique $\nabla = \lim_{\gamma\to 1} \frac{\gamma-1}{\chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma)-1}$. L'opérateur de W^{fin} ainsi défini est *l'opérateur de Sen* Θ_{Sen}. Ses valeurs propres sont les *poids de Hodge-Tate* de W.

(ii) Si $W = (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ où V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K et K_∞/K est l'extension cyclotomique, on note $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ l'espace W^{fin} et les *poids de Hodge-Tate de V* sont, par définition, ceux de W. De plus :

• L'application naturelle $\mathbf{C}_p \otimes_{K_\infty} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V) \to \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est un isomorphisme de représentations $\mathbf{C}_p$-semi-linéaires de G_K.

• Si on étend Θ_{Sen} par $\mathbf{C}_p$-linéarité à $\mathbf{C}_p \otimes_{K_\infty} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$, alors Θ_{Sen} commute à l'action de G_K et on a

$$\big(\mathbf{C}_p \otimes_{K_\infty} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)\big)^{\Theta_{\mathrm{Sen}}=0} = \mathbf{C}_p \otimes_K (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}.$$

• $\Theta_{\mathrm{Sen}} = 0$ (ce qui équivaut à ce que V soit de Hodge-Tate à poids de Hodge-Tate tous nuls) si et seulement si le sous-groupe d'inertie de G_K agit à travers un quotient fini sur V (cf. § 5 de [30]).

• Θ_{Sen} appartient au sous-$\mathbf{C}_p$-espace vectoriel de $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{End}(V)$ engendré par l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de l'image de G_K dans $\mathrm{GL}(V)$, et $\mathfrak{g}$ est le plus petit sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathrm{End}(V)$ ayant cette propriété (cf. § 3.2 de [31]).

(iii) L'espace $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ du (ii) admet, si n est assez grand, un unique sous-K_n-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen},n}(V)$ (avec $K_n = K(\mu_{p^n})$), stable par Γ_K et tel que l'application naturelle $K_\infty \otimes_{K_n} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen},n}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ soit un isomorphisme (il en est alors de même de l'application $\mathbf{C}_p \otimes_{K_n} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen},n}(V) \to \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$) ; ce sous-espace est stable par Θ_{Sen}.

Le fait que W^{fin} n'est pas un objet adapté si $\dim \Gamma_K \geqslant 2$ avait été observé par Sen lui-même. À titre d'exemple, signalons le résultat suivant (prop. 5.3). Soit Γ_K un sous-groupe ouvert de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et $\pm s$ les deux poids de Hodge-Tate de la représentation déduite de $G_K \to \Gamma_K \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

PROPOSITION 1.5. – *Soit* Γ_K *comme ci-dessus, avec* $s \neq 0$*, et soit* W *une* $\hat{K}_\infty$*-représentation semi-linéaire de dimension finie de* Γ_K*.*

(i) *Si* $W^{\mathrm{fin}} \neq \{0\}$*, alors* W *a un poids de Hodge-Tate qui appartient à* $s \cdot \mathbf{Z}$ *;*

(ii) *Si* W^{fin} *contient une base de* W*, alors l'opérateur de Sen de* W *est semisimple, à valeurs propres dans* $s \cdot \mathbf{Z}$.

1.3. Vecteurs localement analytiques

L'idée principale de cet article est de remplacer W^{fin} par l'espace des vecteurs localement $\mathbf{Q}_p$-analytiques W^{la} dont nous rappelons maintenant la définition.

Soit G un groupe de Lie p-adique (par exemple Γ_K), et soit W un $\mathbf{Q}_p$-espace de Banach qui est une représentation de G. Si $w \in W$, alors suivant le § 7 de [28], nous disons que w est *localement* $\mathbf{Q}_p$*-analytique* si l'application « orbite » $G \to W$, donnée par $g \mapsto g(w)$, est une fonction localement $\mathbf{Q}_p$-analytique sur G. On note W^{la} l'espace des vecteurs localement $\mathbf{Q}_p$-analytiques de W. On a $W^{\mathrm{fin}} \subset W^{\mathrm{la}}$ d'après un analogue d'un résultat classique de Cartan (§ V.9 de [32]). Notre premier résultat (th. 3.2), qui montre qu'en dimension 1 on retombe sur les objets introduits par Sen, est le suivant.

THÉORÈME 1.6. – *Si* $\dim \Gamma_K = 1$ *et si* W *est une* $\hat{K}_\infty$*-représentation semi-linéaire de dimension finie de* Γ_K*, alors* $W^{\mathrm{fin}} = W^{\mathrm{la}}$.

L'analogue du th. 1.3 dans le cas où Γ_K est de dimension quelconque est le résultat suivant (th. 3.4) qui montre que W^{la} est un invariant fin de W.

THÉORÈME 1.7. – *Si* Γ_K *est un groupe de Lie* p*-adique, et si* W *est une* $\hat{K}_\infty$*-représentation semi-linéaire de dimension finie de* Γ_K*, l'application naturelle* $\hat{K}_\infty \otimes_{\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}} W^{\mathrm{la}} \to W$ *est un isomorphisme.*

REMARQUE 1.8. – (i) Le th. 1.7 soulève la question de la description de $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$. On montre facilement (lem. 2.5) que $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ est toujours un corps. Si $\dim \Gamma_K = 1$, alors $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}} = K_\infty$ par le th. 1.6, mais si $\dim \Gamma_K \geqslant 2$, alors $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ contient strictement K_∞ (cf. th. 1.9). Nous calculons explicitement $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ dans les cas « Lubin-Tate » (th. 4.2) et « SL_2 » (th. 5.5).

(ii) Le th. 1.7 fait écho au résultat de Schneider et Teitelbaum [28] selon lequel, si W est une représentation admissible de Γ_K, alors W^{la} est dense dans W. On ne peut pas utiliser ce résultat ici car une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de Γ_K n'est pas une représentation admissible de Γ_K. Par exemple, dans le cas de l'extension cyclotomique, $(\mathscr{O}_{\hat{K}_\infty}/p)^{\Gamma_K}$ contient l'image de $\frac{p}{\zeta-1}$ modulo p, pour toute racine de l'unité ζ d'ordre une puissance de p, et donc est de dimension infinie sur $\mathbf{F}_p$.

Soit d la dimension de Γ_K ; il existe alors (§ 27 de [26]) un groupe analytique $\mathbb{G}$ de dimension d, défini sur $\mathbf{Q}_p$, tel que l'on ait $\Gamma_K = \mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$. Si $n \geqslant 1$, on note Γ_n le groupe $\mathbb{G}(p^n\mathbf{Z}_p)$, image de $p^n\mathfrak{g}$ par l'exponentielle (où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de Γ_K et est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang d), et on note K_n le sous-corps $K_\infty^{\Gamma_n}$ de K_∞. L'anneau $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ est la limite inductive des $\hat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-an}}$, où l'on a noté $\hat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-an}}$ l'ensemble des v tels que $g \mapsto g \cdot v$ soit analytique sur Γ_n, et $\hat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-an}}$ est une K_n-algèbre de Banach ; on note X_n le K_n-espace analytique qu'elle définit. Le résultat suivant (th. 6.1) montre que, après extension des scalaires à $\mathbf{C}_p$, X_n devient une boule de dimension $d-1$.

THÉORÈME 1.9. – *Soit V une représentation fidèle de Γ_K, et soit $\mathbb{H}$ le sous-groupe à un paramètre de $\mathbb{G}$ engendré par l'opérateur de Sen de V, vu comme élément de $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathfrak{g}$. Si $n \geqslant 1$, alors $X_n(\mathbf{C}_p) = \mathbb{H}(p^n \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}) \backslash \mathbb{G}(p^n \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p})$.*

REMARQUE 1.10. – (i) La preuve du théorème montre que $\mathbb{H}$ n'est pas trivial, ce qui se traduit par le fait que $\Theta_{\mathrm{Sen}} \neq 0$. Comme la seule hypothèse que l'on a faite sur Γ_K est que son sous-groupe d'inertie est infini, cela fournit une preuve du théorème de Sen (troisième point du (ii) de la rem. 1.4) selon lequel une représentation de G_K est de Hodge-Tate à poids de Hodge-Tate tous nuls si et seulement si le sous-groupe d'inertie de G_K agit à travers un quotient fini ; cette preuve n'utilise pas les résultats de [29]. Par contre, il n'a pas l'air possible de retrouver, par cette méthode, le résultat plus fin décrivant l'algèbre de Lie de G_K en termes de Θ_{Sen}.

(ii) La méthode permettant de prouver le th. 1.1 peut aussi être utilisée pour montrer que si L est une extension galoisienne de K qui n'est pas profondément ramifiée, alors $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{GL}_d(\hat{L})) = \{1\}$. La non nullité de Θ_{Sen} implique donc que K_∞/K est profondément ramifiée. Autrement dit, on a redémontré, sans utiliser [29], qu'une extension galoisienne de groupe de Galois un groupe de Lie p-adique est profondément ramifiée si et seulement si elle est infiniment ramifiée.

(iii) Comme X_n est défini sur K_n et que $\mathbb{G}$ est défini sur $\mathbf{Q}_p$, on dispose d'actions de G_{K_n} sur $X_n(\mathbf{C}_p)$ et sur $\mathbb{G}(p^n \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p})$, mais celles-ci ne sont pas compatibles : il faut tordre l'application naturelle. Notons $\gamma : G_{K_n} \to \Gamma_n = \mathbb{G}(p^n \mathbf{Z}_p)$ la projection naturelle et $\pi : \mathbb{G}(p^n \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}) \to X_n(\mathbf{C}_p)$ l'application fournie par le th. 1.9. On a alors

$$\sigma(\pi(x)) = \pi(\gamma(\sigma)\sigma(x)), \quad \text{si } x \in \mathbb{G}(p^n \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}) \text{ et } \sigma \in G_{K_n}.$$

Le fait que cette action descende à $\mathbb{H}(p^n \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}) \backslash \mathbb{G}(p^n \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p})$ est une conséquence de ce que Θ_{Sen} commute à G_{K_n}. On remarquera que l'orbite sous G_{K_n} de l'élément neutre de $\mathbb{G}$ est Zariski dense dans $X_n(\mathbf{C}_p)$ (c'est l'image par π de Γ_n), ce qui explique que $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}} = \bigcup_{n \geqslant 1} \hat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-an}}$ soit un corps bien que $\bigcap_{n \geqslant 1} X_n(\mathbf{C}_p)$ ne soit pas vide.

1.4. Extensions de type Lubin-Tate

Supposons dans ce qui suit que K_∞ est l'extension de K engendrée par les points de torsion d'un $\mathscr{O}_F$-module formel, avec $F \subset K$ extension galoisienne finie de $\mathbf{Q}_p$. Par la théorie de Lubin-Tate, le groupe Γ_K s'identifie, via le caractère de Lubin-Tate χ_F, à un sous-groupe ouvert de $\mathscr{O}_F^\times$. La théorie des périodes p-adiques fournit, pour chaque plongement $\tau : F \to \overline{\mathbf{Q}}_p$ différent de l'identité, un élément $u_\tau \in \mathbf{C}_p^\times$ tel que $g(u_\tau) = \tau \circ \chi_F(g) \cdot u_\tau$. Soit $x_\tau = \log(u_\tau)$. Le résultat suivant donne une bonne idée de ce à quoi ressemble $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$; nous renvoyons au th. 4.2 pour un énoncé plus précis mais plus technique.

THÉORÈME 1.11. – *L'anneau $K_\infty[\{x_\tau\}_{\tau \neq \mathrm{Id}}]$ est dense dans $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ pour sa topologie naturelle.*

Si W est une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension finie de Γ_K, alors disons qu'un vecteur $w \in W$ est localement F-analytique si l'application orbite $g \mapsto gw$ est localement F-analytique sur $\Gamma_K \subset \mathscr{O}_F^\times$. On note $W^{F\text{-la}}$ l'espace des vecteurs de W qui sont localement F-analytiques. Le th. 1.11 implique que $\hat{K}_\infty^{F\text{-la}} = K_\infty$. On a alors (th. 4.11).