343

ASTÉRISQUE

2012

STRING TOPOLOGY FOR STACKS

Kai BEHREND & Grégory GINOT & Behrang NOOHI & Ping XU

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 343, 2012

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 40 € ($ 60)
Abonnement Europe : 472 €, hors Europe : 512 € ($ 768)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-342-3

Directeur de la publication : Aline BONAMI

343

ASTÉRISQUE

2012

STRING TOPOLOGY FOR STACKS

Kai BEHREND & Grégory GINOT & Behrang NOOHI & Ping XU

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Kai Behrend
Department of Mathematics, University of British Columbia, 1984 Mathematics Road, Vancouver, B.C., Canada V6T 1Z2

Grégory Ginot
École normale supérieure de Cachan et université Paris 13, CMLA, 61, avenue du Président Wilson, 94230 Cachan cedex, France

Behrang Noohi
Max Planck Institut für Mathematik, Vivastsgasse 7, 53111 Bonn, Germany

Ping Xu
Pennsylvania State University, 210 McAllister Building, University Park, PA 16802, USA

***Classification mathématique par sujet* (2000).** — 55P50, 14D23; 55D35, 55N.

Mots-clefs. — Topologie des cordes, champs topologiques, espaces de lacets, champ d'inertie, lacets fantômes, théorie bivariante, morphismes de Gysin, théorie conforme des champs, produit orbifold.

STRING TOPOLOGY FOR STACKS

Kai BEHREND, Grégory GINOT, Behrang NOOHI & Ping XU

Abstract. — We establish the general machinery of string topology for differentiable stacks. This machinery allows us to treat on equal footing free loops in stacks and hidden loops. We construct a bivariant (in the sense of Fulton and MacPherson) theory for topological stacks: it gives us a flexible theory of Gysin maps which are automatically compatible with pullback, pushforward and products. Further we prove an excess formula in this context. We introduce oriented stacks, generalizing oriented manifolds, which are stacks on which we can do string topology. We prove that the homology of the free loop stack of an oriented stack and the homology of hidden loops (sometimes called ghost loops) are a Frobenius algebra which are related by a natural morphism of Frobenius algebras. We also prove that the homology of free loop stack has a natural structure of BV-algebra, which together with the Frobenius structure fits into an homological conformal field theories with closed positive boundaries. We also use our constructions to study an analogue of the loop product for stacks of maps of (n-dimensional) spheres to oriented stacks and compatible power maps in their homology. Using our general machinery, we construct an intersection pairing for (non necessarily compact) almost complex orbifolds which is in the same relation to the intersection pairing for manifolds as Chen-Ruan orbifold cup-product is to ordinary cup-product of manifolds. We show that the hidden loop product of almost complex orbifolds is isomorphic to the orbifold intersection pairing twisted by a canonical class. Finally we gave some examples including the case of the classifying stacks $[*/G]$ of a compact Lie group.

***Résumé* (Topologie des cordes des champs différentiels).** — Nous construisons un cadre général pour traiter la topologie des cordes des champs différentiels. En particulier, ce cadre s'applique aussi bien aux lacets libres d'un champ qu'aux lacets fantômes, champs d'inertie. On construit une théorie bivariante (au sens de Fulton et MacPherson) pour les champs topologiques et on en déduit l'existence de morphismes de Gysin compatibles avec les opérations standards: produits, produits fibrés, recollements. Par ailleurs on démontre une formule d'excès pour les fibrés normaux sur des champs différentiels. On définit une notion de champs orientés, qui généralise celle de variétés orientées, qui sont les champs sur lesquels on dispose des opérations de la topologie des cordes. En particulier, on démontre que l'homologie du champ des lacets libres d'un champ orienté ainsi que l'homologie de son champ des lacets fantômes sont munies de structures naturelles d'algèbres de Frobenius. De plus le morphisme naturel entre ces champs de lacets est un morphisme d'algèbres de Frobenius. Par ailleurs, on prouve que l'homologie du champ des lacets libres est muni d'une structure de BV-algèbre compatible avec la structure d'algèbre de Frobenius au sens où ces structures sont extraites d'une théorie homologique conforme des champs à bords compacts. On applique également nos techniques pour étudier un analogue du produit de Chas-Sullivan, ainsi que des opérations puissances compatibles, sur l'homologie des champs de morphismes des sphères dans un champ orienté. Notre cadre permet aussi de construire un produit d'intersection pour les orbifolds quasi-complexes (non-nécessairement compacts) qui est, en un sens, le dual de Poincaré du produit de Chen et Ruan. On démontre de plus que le produit à la Chas-Sullivan des lacets fantômes d'un orbifold quasi-complexe est isomorphe au produit d'intersection tordu par une classe naturelle. On étudie plusieurs exemples, notamment le cas du champ $[*/G]$ classifiant d'un groupe de Lie compact.

CONTENTS