

**343**

**ASTÉRISQUE**

**2012**

**STRING TOPOLOGY FOR STACKS**

**Kai BEHREND & Grégory GINOT & Behrang NOOHI & Ping XU**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

---

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 343, 2012

---

*Comité de rédaction*

Ahmed ABBES	Damien GABORIAU
Viviane BALADI	Michael HARRIS
Gérard BESSON	Fabrice PLANCHON
Laurent BERGER	Bertrand TOEN
Philippe BIANE	Pierre SCHAPIRA
Hélène ESNAULT	
Éric VASSEROT (dir.)	

*Diffusion*

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 40 € (\$ 60)

*Abonnement* Europe : 472 €, hors Europe : 512 € (\$ 768)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2012

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-342-3

Directeur de la publication : Aline BONAMI

---

**343**

**ASTÉRISQUE**

**2012**

**STRING TOPOLOGY FOR STACKS**

Kai BEHREND & Grégory GINOT & Behrang NOOHI & Ping XU

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Kai Behrend*

Department of Mathematics, University of British Columbia, 1984 Mathematics Road, Vancouver, B.C., Canada V6T 1Z2

*Grégory Ginot*

École normale supérieure de Cachan et université Paris 13, CMLA, 61, avenue du Président Wilson, 94230 Cachan cedex, France

*Behrang Noohi*

Max Planck Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany

*Ping Xu*

Pennsylvania State University, 210 McAllister Building, University Park, PA 16802, USA

---

**Classification mathématique par sujet (2000).** — 55P50, 14D23; 55D35, 55N.

**Mots-clés.** — Topologie des cordes, champs topologiques, espaces de lacets, champ d'inertie, lacets fantômes, théorie bivariante, morphismes de Gysin, théorie conforme des champs, produit orbifold.

# STRING TOPOLOGY FOR STACKS

Kai BEHREND, Grégory GINOT, Behrang NOOHI & Ping XU

**Abstract.** — We establish the general machinery of string topology for differentiable stacks. This machinery allows us to treat on equal footing free loops in stacks and hidden loops. We construct a bivariant (in the sense of Fulton and MacPherson) theory for topological stacks: it gives us a flexible theory of Gysin maps which are automatically compatible with pullback, pushforward and products. Further we prove an excess formula in this context. We introduce oriented stacks, generalizing oriented manifolds, which are stacks on which we can do string topology. We prove that the homology of the free loop stack of an oriented stack and the homology of hidden loops (sometimes called ghost loops) are a Frobenius algebra which are related by a natural morphism of Frobenius algebras. We also prove that the homology of free loop stack has a natural structure of  $BV$ -algebra, which together with the Frobenius structure fits into an homological conformal field theories with closed positive boundaries. We also use our constructions to study an analogue of the loop product for stacks of maps of ( $n$ -dimensional) spheres to oriented stacks and compatible power maps in their homology. Using our general machinery, we construct an intersection pairing for (non necessarily compact) almost complex orbifolds which is in the same relation to the intersection pairing for manifolds as Chen-Ruan orbifold cup-product is to ordinary cup-product of manifolds. We show that the hidden loop product of almost complex orbifolds is isomorphic to the orbifold intersection pairing twisted by a canonical class. Finally we gave some examples including the case of the classifying stacks  $[*/G]$  of a compact Lie group.

**Résumé (Topologie des cordes des champs différentiels).** — Nous construisons un cadre général pour traiter la topologie des cordes des champs différentiels. En particulier, ce cadre s'applique aussi bien aux lacets libres d'un champ qu'aux lacets fantômes, champs d'inertie. On construit une théorie bivariante (au sens de Fulton et MacPherson) pour les champs topologiques et on en déduit l'existence de morphismes de Gysin compatibles avec les opérations standards: produits, produits fibrés, recollements. Par ailleurs on démontre une formule d'excès pour les fibrés normaux sur des champs différentiels. On définit une notion de champs orientés, qui généralise celle de variétés orientées, qui sont les champs sur lesquels on dispose des opérations de la topologie

des cordes. En particulier, on démontre que l'homologie du champ des lacets libres d'un champ orienté ainsi que l'homologie de son champ des lacets fantômes sont munies de structures naturelles d'algèbres de Frobenius. De plus le morphisme naturel entre ces champs de lacets est un morphisme d'algèbres de Frobenius. Par ailleurs, on prouve que l'homologie du champ des lacets libres est muni d'une structure de BV-algèbre compatible avec la structure d'algèbre de Frobenius au sens où ces structures sont extraites d'une théorie homologique conforme des champs à bords compacts. On applique également nos techniques pour étudier un analogue du produit de Chas-Sullivan, ainsi que des opérations puissances compatibles, sur l'homologie des champs de morphismes des sphères dans un champ orienté. Notre cadre permet aussi de construire un produit d'intersection pour les orbifolds quasi-complexes (non-nécessairement compacts) qui est, en un sens, le dual de Poincaré du produit de Chen et Ruan. On démontre de plus que le produit à la Chas-Sullivan des lacets fantômes d'un orbifold quasi-complexe est isomorphe au produit d'intersection tordu par une classe naturelle. On étudie plusieurs exemples, notamment le cas du champ  $[*/G]$  classifiant d'un groupe de Lie compact.

# CONTENTS

<b>Introduction</b> .....	ix
Conventions .....	xiii
Topological spaces .....	xiii
Manifolds .....	xiii
Groupoids .....	xiii
Stacks .....	xiii
(Co)homology .....	xiv
Acknowledgements .....	xiv
<b>1. Topological stacks</b> .....	1
1.1. Stacks over $\mathbf{Top}$ .....	1
1.2. Morphisms of stacks .....	3
1.3. Transformation groupoids .....	3
1.4. Topological stacks .....	3
1.5. Substacks of a topological stack .....	5
1.6. Hurewicz topological stacks .....	5
1.7. Pushouts in the category of stacks .....	6
1.8. Orbifolds as topological stacks .....	7
1.9. Geometric stacks .....	8
<b>2. Homotopy type of a topological stack</b> .....	9
2.1. Classifying space of a topological groupoid .....	9
2.2. Classifying space of a topological stack .....	9
2.3. Paracompactness of the classifying space .....	10
2.4. (Co)homology theories for topological stacks .....	10
2.5. Eilenberg-Steenrod axioms for topological stacks .....	11
2.6. Singular homology and cohomology .....	11
<b>3. Vector bundles on stacks</b> .....	15
3.1. Operations on vector bundles .....	16
3.2. Tangent, normal, and excess bundles .....	17
3.2.1. Tangent bundle .....	17
3.2.2. Normal bundle .....	18
3.2.3. Excess bundle and transversality .....	18

<b>4. Thom isomorphism</b> .....	21
<b>5. Loop stacks</b> .....	25
5.1. Mapping stacks and the free loop stack .....	25
5.2. Groupoid presentation .....	26
5.2.1. Target connected groupoid .....	28
5.2.2. Discrete group action .....	28
<b>6. Bounded proper morphisms of topological stacks</b> .....	29
6.1. Some technical lemmas .....	30
<b>7. Bivariant theory for topological stacks</b> .....	33
7.1. Bivariant groups .....	33
7.2. Independent pullbacks .....	35
7.3. Confined pushforwards .....	35
7.4. Products .....	36
7.5. Künneth formula .....	37
7.6. Associated covariant and contravariant theories .....	38
<b>8. Regular embeddings, submersions, and normally nonsingular morphisms</b> .....	41
8.1. Submersions .....	41
8.2. Regular embeddings .....	42
8.3. Normally nonsingular morphisms of stacks and oriented stacks .....	45
<b>9. Gysin maps</b> .....	55
9.1. Construction of the Gysin maps .....	55
9.2. Standard Properties of Gysin maps .....	56
9.3. A special case: $G$ -equivariant Gysin maps .....	58
9.4. The excess formula .....	59
<b>10. The loop product</b> .....	63
10.1. Construction of the loop product .....	63
10.2. Proof of Theorems .....	66
<b>11. Hidden loop product for family of groups over a stack</b> .....	71
11.1. Hidden loop product .....	71
11.2. Family of commutative groups and crossed modules .....	74
<b>12. Frobenius algebra structures</b> .....	79
12.1. Quick review on Frobenius algebras .....	79
12.2. Frobenius algebra structure for loop stacks .....	80
12.3. Frobenius algebra structure for inertia stacks .....	85
12.4. The canonical morphism $\Lambda\mathfrak{X} \rightarrow L\mathfrak{X}$ .....	90
<b>13. The <math>BV</math>-algebra on the homology of free loop stack</b> .....	93



13.1. <i>BV</i> -structure .....	93
13.2. Gerstenhaber bracket and proof of Theorem 13.2 .....	94
<b>14. Homological conformal field theory and free loop stacks .....</b>	<b>103</b>
14.1. Quick review on Homological Conformal Field theory with positive boundaries .....	103
14.2. The Homological Conformal Field Theory with positive closed boundaries associated to free loop stacks .....	106
14.3. Construction of the operations .....	108
<b>15. Remarks on brane topology for stacks .....</b>	<b>121</b>
<b>16. Orbifold intersection pairing .....</b>	<b>125</b>
16.1. Poincaré duality and orbifolds .....	125
16.2. Orbifold intersection pairing and hidden loop product .....	127
16.3. Examples of orbifold intersection pairing .....	133
<b>17. Examples .....</b>	<b>139</b>
17.1. The case of manifolds .....	139
17.2. Hidden loop (co)product for global quotient by a finite group .....	139
17.3. String topology of $[S^{2n+1}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+1}]$ .....	142
17.4. String topology of $L[* / G]$ when $G$ is a compact Lie group .....	146
<b>A. Categories fibered in groupoids .....</b>	<b>155</b>
A.1. The 2-category of fibered categories .....	156
A.2. Descent condition .....	157
A.3. Quotient stacks .....	158
<b>B. Generalized Fulton-MacPherson bivariant theories .....</b>	<b>159</b>
B.1. The underlying (2-)category .....	159
B.2. Axioms for a bivariant theory .....	161
<b>Bibliography .....</b>	<b>165</b>

