357

ASTÉRISQUE

2013

THE FORMAL THEORY OF TANNAKA DUALITY

Daniel Schäppi

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 357, 2013

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 42 € ($ 63)

Abonnement Europe : 484 €, hors Europe : 523 € ($ 784)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179
ISBN 978-2-85629-773-5

Directeur de la publication : Marc Peigné

357

ASTÉRISQUE

2013

THE FORMAL THEORY OF TANNAKA DUALITY

Daniel Schäppi

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Daniel SCHÄPPI
University of Chicago
Department of Mathematics
5734 S University Avenue
60637 Chicago, USA
`schaeppi@math.uchicago.edu`

THE FORMAL THEORY OF TANNAKA DUALITY

Daniel SCHÄPPI

Abstract. — A Tannakian category is an abelian tensor category equipped with a fiber functor and additional structures which ensure that it is equivalent to the category of representations of some affine groupoid scheme acting on the spectrum of a field extension. If we are working over an arbitrary commutative ring rather than a field, the categories of representations cease to be abelian. We provide a list of sufficient conditions which ensure that an additive tensor category is equivalent to the category of representations of an affine groupoid scheme acting on an affine scheme, or, more generally, to the category of representations of a Hopf algebroid in a symmetric monoidal category. In order to do this we develop a "formal theory of Tannaka duality" inspired by Ross Street's "formal theory of monads." We apply our results to certain categories of filtered modules which are used to study p-adic Galois representations.

***Résumé* (La théorie formelle de dualité tannakienne).** — Une catégorie tannakienne est une catégorie abélienne tensorielle munie d'un foncteur fibré et de structures additionnelles de manière à être équivalente à la catégorie des représentations d'un groupoïde affine agissant sur le spectre d'une extension de corps. Si l'on remplace les corps par des anneaux commutatifs, les catégories des représentations ne seront plus abéliennes. Nous donnons des conditions suffisantes pour qu'une catégorie additive tensorielle soit équivalente à la catégorie des représentations d'un schéma en groupoïdes affines, ou plus généralement, à la catégorie des représentations d'un algebroïde de Hopf dans une catégorie symmétrique monoïdale. Pour ce faire nous développons une « théorie formelle de dualité tannakienne » inspirée par la « théorie formelle des monades » de Ross Street. Nous appliquons nos résultats à certaines catégories des modules filtrés qui sont utilisées pour étudier les représentations galoisiennes p-adiques.

CONTENTS