Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

VARIATIONS AUTOUR D'UN THÉORÈME MÉTRIQUE DE KHINTCHINE

Yann Bugeaud & Carlos Gustavo Moreira

Tome 144
Fascicule 3

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 507-538

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 144, septembre 2016

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € ($ 291)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. math. France
144 (3), 2016, p. 507–538

VARIATIONS AUTOUR D'UN THÉORÈME MÉTRIQUE DE KHINTCHINE

PAR YANN BUGEAUD & CARLOS GUSTAVO MOREIRA

À Michel Waldschmidt, à l'occasion de ses 70 ans.

RÉSUMÉ. — Nous montrons qu'il n'existe pas de nombre réel typique du point de vue de l'approximation diophantienne, dans un sens précisé ci-après. Soit Ψ une application de l'ensemble des entiers strictement positifs dans l'ensemble des nombres réels positifs. Khintchine a démontré que, si la fonction $q \mapsto q^2\Psi(q)$ décroît et si la série de terme général $q\Psi(q)$ diverge, alors l'ensemble $\mathscr{K}(\Psi)$ des nombres réels ξ pour lesquels l'inégalité $|\xi - p/q| < \Psi(q)$ possède une infinité de solutions rationnelles p/q est de mesure de Lebesgue totale (Beresnevich, Dickinson et Velani ont démontré plus tard le même résultat en supposant seulement que Ψ est décroissante). Nous montrons que, pour presque tout nombre réel α, il existe une fonction Ψ qui satisfait de bonnes conditions de « régularité » (concernant la décroissance de Ψ), telle que la série de terme général $q\Psi(q)$ diverge alors que l'inégalité $|\alpha - p/q| < \Psi(q)$ ne possède aucune solution rationnelle p/q.

Khintchine a montré également que, si la série de terme général $q\Psi(q)$ converge, alors l'ensemble $\mathscr{K}(\Psi)$ est de mesure de Lebesgue nulle. Nous montrons que, pour presque tout nombre réel α, il existe une fonction Ψ qui satisfait de bonnes conditions de « régularité », telle que la série de terme général $q\Psi(q)$ converge alors que l'inégalité $|\alpha - p/q| < \Psi(q)$ possède une infinité de solutions rationnelles p/q.

Texte reçu le 24 janvier 2014, révisé et accepté le 30 décembre 2015.

YANN BUGEAUD, Université de Strasbourg, Mathématiques, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France. • *E-mail :* `bugeaud@math.unistra.fr`

CARLOS GUSTAVO MOREIRA, IMPA, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, Brasil. • *E-mail :* `gugu@impa.br`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11J04, 11J83.

Mots clefs. — Approximation diophantienne, théorème de Khintchine, théorie métrique des nombres.

Enfin, nous calculons les dimensions de Hausdorff d'ensembles d'exceptions à nos résultats (définis en fonction des conditions de régularité sur Ψ).

Abstract (*Variations around a metric theorem of Khinchin*). — We prove that there are no typical real numbers from the point of view of Diophantine approximations, in a sense that we describe below. Let Ψ be an application from the set of positive integers into the set of nonnegative real numbers. Khintchine established that, if the function $q \mapsto q^2\Psi(q)$ is non-increasing and the series $\sum_{q\geq 1} q\Psi(q)$ diverges, then the set $\mathscr{K}(\Psi)$ of real numbers ξ for which the inequality $|\xi - p/q| < \Psi(q)$ has infinitely many rational solutions p/q has full Lebesgue measure (Beresnevich, Dickinson and Velani proved later the same result assuming that Ψ is just non-increasing). We show that, for almost every real number α, there is a function Ψ which satisfies good "regularity" conditions (on the speed of decreasing of Ψ), such that the series $\sum_{q\geq 1} q\Psi(q)$ diverges but the inequality $|\alpha - p/q| < \Psi(q)$ has no rational solution p/q.

Khintchine also showed that if the series $\sum_{q\geq 1} q\Psi(q)$ converges, then the set $\mathscr{K}(\Psi)$ has zero Lebesgue measure. We show that, for almost every real number α, there is a function Ψ which satisfies good "regularity" conditions, such that the series $\sum_{q\geq 1} q\Psi(q)$ converges but the inequality $|\alpha - p/q| < \Psi(q)$ has infinitely many rational solutions p/q.

We also compute Hausdorff dimensions of sets of exceptions to our results (in terms of the regularity conditions on Ψ).

1. Introduction et résultats

Tout au long du présent article, par fonction d'approximation (ou bien, tout simplement, fonction), nous entendons une application de l'ensemble des entiers strictement positifs dans l'ensemble des nombres réels positifs.

Commençons par rappeler un énoncé légèrement plus fort que le théorème de Khintchine [13].

Théorème K. — *Soit Ψ une fonction d'approximation. Alors l'ensemble*

$$\mathscr{K}(\Psi) := \left\{ \xi \in \mathbf{R} : \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \Psi(q) \quad \textit{pour une infinité de rationnels } \frac{p}{q} \right\}$$

est de mesure de Lebesgue nulle si la série $\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q)$ converge. En outre, si on suppose que Ψ est décroissante et si la série $\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q)$ diverge, alors $\mathscr{K}(\Psi)$ est de mesure totale.

Le lemme de Borel-Cantelli entraîne facilement la première assertion du théorème K, la deuxième étant plus délicate à démontrer.

Une démonstration du théorème K figure, par exemple, dans le mémoire de Beresnevich, Dickinson et Velani [2]. Khintchine [13] (voir aussi [4]) avait démontré la deuxième assertion du théorème K sous une hypothèse légèrement plus restrictive, à savoir la décroissance de la fonction $q \mapsto q^2\Psi(q)$. Observons que, quelle que soit la fonction $\Psi : \mathbf{Z}_{\geq 1} \to \mathbf{R}^+$, si a et b sont des nombres réels vérifiant $a < b$, alors la fonction $q \mapsto q^a \Psi(q)$ est décroissante si $q \mapsto q^b \Psi(q)$ est décroissante.

Duffin et Schaeffer [6] ont montré que la conclusion de la deuxième assertion du théorème K reste vraie si, au lieu de supposer que Ψ décroît, on se contente de supposer l'existence d'un nombre réel λ tel que la fonction $q \mapsto q^\lambda \Psi(q)$ est décroissante. Une hypothèse sur Ψ est toutefois nécessaire, voir le Chapter 2 de la monographie de Harman [10]. Dans ce domaine, le problème ouvert le plus célèbre est la conjecture de Duffin et Schaeffer, formulée ci-dessous. Rappelons que $\varphi(n)$ compte le nombre d'entiers strictement positifs, inférieurs ou égaux à l'entier n et premiers à n. Dans le présent texte, « presque tout » fait toujours référence à la mesure de Lebesgue.

Conjecture DS. — *Soit Ψ une fonction d'approximation vérifiant*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q)\, \varphi(q) = +\infty.$$

Alors, pour presque tout nombre réel ξ, l'inégalité

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \Psi(q), \quad \gcd(p, q) = 1, \quad q \geq 1,$$

possède une infinité de solutions.

Notons qu'en considérant des recouvrements bien choisis il est facile de montrer que, si Ψ est une fonction d'approximation vérifiant

$$\sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q)\, \varphi(q) < +\infty,$$

alors, pour presque tout nombre réel ξ, l'inégalité

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \Psi(q), \quad \gcd(p, q) = 1, \quad q \geq 1,$$

ne possède qu'un nombre fini de solutions. Des progrès récents en direction de la Conjecture DS ont été effectués dans [1, 3, 11, 16]. Nous nous intéressons à des questions voisines, motivées par le passage suivant de la recension [20] de la monographie [4] :

La remarque suivante aurait mérité de figurer dans le livre : aucun nombre réel ne se comporte, du point de vue de l'approximation rationnelle, comme presque tous les nombres réels. Plus précisément, si $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions croissantes f définies sur les entiers positifs à valeurs réelles positives possédant la propriété que pour presque tout x réel, l'inégalité

$$|x - p/q| < 1/f(q)$$