Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

GROUPES DE KAC-MOODY DÉPLOYÉS SUR UN CORPS LOCAL, II. MASURES ORDONNÉES

Guy Rousseau

Tome 144
Fascicule 4

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 613-692

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 4, tome 144, décembre 2016

Comité de rédaction

Emmanuel Breuillard
Yann Bugeaud
Jean-François Dat
Charles Favre
Marc Herzlich
O'Grady Kieran
Raphaël Krikorian
Julien Marché
Emmanuel Russ
Christophe Sabot
Wilhelm Schlag

Pascal Hubert (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € ($ 291)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2016*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

Bull. Soc. math. France
144 (4), 2016, p. 613–692

GROUPES DE KAC-MOODY DÉPLOYÉS SUR UN CORPS LOCAL II. MASURES ORDONNÉES

par Guy Rousseau

Résumé. — Pour un groupe de Kac-Moody déployé (au sens de J. Tits) sur un corps réellement valué quelconque, on construit une masure affine ordonnée sur laquelle ce groupe agit. Cette construction généralise celle déjà effectuée par S. Gaussent et l'auteur quand le corps résiduel contient le corps des complexes et celle de F. Bruhat et J. Tits quand le groupe est réductif. On montre que cette masure vérifie bien toutes les propriétés des masures affines ordonnées comme définies précédemment par l'auteur. On utilise le groupe de Kac-Moody maximal au sens d'O. Mathieu et on montre quelques résultats pour celui-ci sur un corps quelconque; en particulier on prouve, dans certains cas, un résultat de simplicité pour ce groupe maximal.

Abstract (*Split Kac-Moody groups over local fields, II. Masures*)

For a split Kac-Moody group (in J. Tits' definition) over a field endowed with a real valuation, we build a masure on which the group acts. This construction generalizes the one already done by S. Gaussent and the author when the residue field contains the complex field and the one by F. Bruhat and J. Tits when the group is reductive. We prove that this masure has all the properties of the "masures affines ordonnées" defined previously by the author. We use the maximal Kac-Moody group as defined by O. Mathieu and we prove a few new results about it over any field; in particular we prove, in some cases, a simplicity result for this group.

Texte reçu le 28 janvier 2014, accepté le 6 mai 2015.

Guy Rousseau, Université de Lorraine, Institut Elie Cartan de Lorraine, UMR 7502, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy, et CNRS, Institut Elie Cartan de Lorraine, UMR 7502, Vandœuvre-lès-Nancy, F-54506, France. • *E-mail :* `Guy.Rousseau@univ-lorraine.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 20G44, 20G25, 20E42, 51E24, 20E32, 17B67.

Mots clefs. — Groupe de Kac-Moody, corps local, algèbre enveloppante, immeuble, masure, groupe simple.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2016/613/$ 5.00
© Société Mathématique de France

Introduction

L'étude des groupes de Kac-Moody sur un corps local a été initiée par Howard Garland [16] pour certains groupes de lacets. Dans [34] on a construit un immeuble « microaffine » pour tous les groupes de Kac-Moody (minimaux au sens de J. Tits) sur un corps muni d'une valuation réelle. C'est un immeuble (en général non discret) avec les bonnes propriétés habituelles des immeubles. Cependant cet immeuble microaffine n'est pas l'analogue des immeubles de F. Bruhat et J. Tits pour les groupes réductifs. Il correspond plutôt à leur frontière dans la compactification de Satake ou compactification polyédrique. De plus il ne traduit pas les décompositions de Cartan de [16].

Une autre construction est envisageable pour un groupe de Kac-Moody sur un corps réellement valué. Elle est la généralisation directe de celle de Bruhat-Tits ([6] et [7]) et traduit les décompositions de Cartan de [16] dans le cas des groupes de lacets (voir 5.17.1). Cependant, comme ces décompositions ne sont vérifiées que pour un sous-semi-groupe, l'espace $\mathscr{I}$ ainsi construit à la Bruhat-Tits est tel que deux points quelconques ne sont pas toujours dans un même appartement. Il ne mérite donc pas le nom d'immeuble. Il s'est avéré cependant utile et a donc été considéré sous le nom de masure.

La construction de cette masure a été effectuée dans [17] et on a pu l'utiliser pour des résultats en théorie des représentations. Le corps valué intéressant dans ce cadre est le corps des séries de Laurent complexes $\mathbb{C}(\!(t)\!)$. On s'est donc placé dans le cas d'un corps K muni d'une valuation discrète avec un corps résiduel contenant $\mathbb{C}$. Cette situation d'égale caractéristique 0 simplifie les raisonnements et permet, en particulier, d'utiliser les résultats du livre de S. Kumar [23]. On a cependant dû faire quelques hypothèses restrictives sur le groupe de Kac-Moody (en particulier la symétrisabilité).

Par ailleurs dans [36] on a élaboré une définition abstraite de masure affine (inspirée de la définition abstraite des immeubles affines de [39]) et on a montré qu'elle est satisfaite par la plupart des masures définies précédemment. De cette définition découlent des propriétés intéressantes : les résidus en chaque point sont des immeubles jumelés, à l'infini on trouve des immeubles jumelés et deux immeubles microaffines, il existe un préordre invariant sur la masure.

Le but du présent article est de construire la masure affine d'un groupe de Kac-Moody déployé sur un corps muni d'une valuation réelle non triviale et de montrer qu'elle satisfait aux axiomes abstraits de masure affine ordonnée de [36]. Ceci est réalisé sans aucune restriction sur le groupe de Kac-Moody ni sur le corps valué. Pour cela on a essentiellement remplacé dans [17] les groupes de Kac-Moody à la Kumar par ceux d'Olivier Mathieu [27] et la représentation adjointe dans l'algèbre de Lie par celle dans l'algèbre enveloppante entière, puisqu'on va considérer aussi de la caractéristique (résiduelle) positive.

Ces complications techniques sont récompensées par la possibilité (nouvelle) de travailler sur un vrai corps local K, i.e., complet pour une valuation discrète avec corps résiduel fini. Alors la masure associée $\mathscr{I}$ est semi-discrète et d'épaisseur finie (5.16), ce qui constitue la bonne généralisation des immeubles affines localement finis. On a ainsi le bon support géométrique pour définir (pour tout groupe de Kac-Moody) une algèbre de Hecke sphérique (associée à des sommets spéciaux de $\mathscr{I}$) ou d'Iwahori-Hecke (associée à des chambres de $\mathscr{I}$) ; on peut alors, par exemple, prouver l'isomorphisme de Satake ou retrouver les algèbres de Hecke affines doubles (DAHA) dans le cas affine. Ces applications sont développées dans [18] et [3]. Jusqu'à présent seul le cas affine était connu, partiellement ou avec des moyens détournés de géométrie algébrique.

Il y a en fait beaucoup de choix possibles pour les groupes de Kac-Moody, cf. [41]. On considère ici les groupes déployés « minimaux » tels que définis par Jacques Tits [40] ; leurs propriétés essentielles sont expliquées dans [42] et aussi [32]. On a résumé celles-ci et prouvé quelques compléments (essentiellement sur les morphismes) dans la première partie de cet article.

La seconde partie est consacrée à l'algèbre enveloppante entière introduite par J. Tits pour construire ses groupes et à la représentation adjointe, déjà largement utilisée par B. Rémy. On y montre un théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (avec des puissances divisées tordues) et on y construit des exponentielles tordues. Ces résultats tirent leur origine dans un travail de généralisation du théorème de simplicité de R. Moody [30], qui est expliqué dans l'appendice.

Les relations de commutation dans un groupe de Kac-Moody minimal G sont compliquées (voire inexistantes). Pour mener à bien des calculs on va raisonner dans un groupe maximal qui ici sera celui (G^{pma} ou G^{nma}) défini par O. Mathieu. On a cependant besoin d'une connaissance plus concrète de celui-ci, c'est le but de la troisième partie. Il est en partie accompli grâce aux exponentielles tordues de la partie précédente.

Dans ces trois premières parties on étudie les groupes de Kac-Moody de manière générale sur un anneau quelconque, ou sur un corps si on veut plus de résultats de structure. On les considère ensuite sur un corps valué (mais aussi sur son anneau des entiers). Dans la quatrième partie on construit l'appartement témoin et les sous-groupes parahoriques (ou assimilés) associés aux sous-ensembles ou filtres de cet appartement témoin. C'est la partie la plus technique. Comme dans [17], ces sous-groupes parahoriques du groupe de Kac-Moody G sont construits en plusieurs étapes en utilisant les groupes maximaux G^{pma} et G^{nma} contenant G. On a cependant dû apporter des changements substantiels aux raisonnements de [17].

On récolte enfin dans la cinquième partie les fruits du travail précédent. Par un procédé classique utilisant l'appartement témoin et les sous-groupes parahoriques, on y construit la masure affine (ordonnée) d'un groupe déployé