

# Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

## HOLONOMIC $\mathcal{D}$ -MODULES WITH BETTI STRUCTURE

Numéro 138-139  
Nouvelle série

2 0 1 4

Takuro MOCHIZUKI

---

### **Comité de rédaction**

Jean BARGE  
Emmanuel BREUILLARD  
Gérard BESSON  
Antoine CHAMBERT-LOIR  
Jean-François DAT  
Jean-Marc DELORT

Charles FAVRE  
Daniel HUYBRECHTS  
Yves LE JAN  
Laure SAINT-RAYMOND  
Wilhem SCHLAG

Raphaël KRIKORIAN (dir.)

### **Diffusion**

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 9  
France  
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency  
O-131, The Shopping Mall  
Arjun Marg, DLF Phase 1  
Gurgaon 122002, Haryana  
Inde

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

### **Tarifs**

*Vente au numéro* : 40 € (\$ 60)

*Abonnement* Europe : 300 € hors Europe : 334 € (\$ 519)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### **Secrétariat : Nathalie Christiaën**

Mémoires de la SMF  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2014

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-285629-791-9

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

---

MÉMOIRES DE LA SMF 138/139

HOLONOMIC  $\mathcal{D}$ -MODULES  
WITH BETTI STRUCTURE

Takuro Mochizuki

Société Mathématique de France 2014

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

*T. Mochizuki*

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto  
606-8502, Japan.

*E-mail* : takuro@kurims.kyoto-u.ac.jp

---

**2000 Mathematics Subject Classification.** — 14F10, 32C38.

**Key words and phrases.** — holonomic D-modules, Betti structure, Stokes structure.

---

*In memory of Tora, the cat of RIMS*



# HOLONOMIC $\mathcal{D}$ -MODULES WITH BETTI STRUCTURE

Takuro Mochizuki

**Abstract.** — We define the notion of Betti structure for holonomic  $\mathcal{D}$ -modules which are not necessarily regular singular. We establish the fundamental functorial properties. We also give auxiliary analysis of holomorphic functions of various types on the real blow up.

**Résumé ( $\mathcal{D}$ -modules holonomes munis d'une structure de Betti)**

Nous définissons la notion de structure Betti pour les  $\mathcal{D}$ -modules holonomes qui ne sont pas nécessairement singuliers réguliers. Nous établissons leurs propriétés fonctorielles principales. Nous donnons également une analyse supplémentaire des fonctions holomorphes de divers types sur l'éclatement réel.





# CONTENTS

<b>1. Introduction</b> .....	1
1.1. Pre-Betti structure .....	2
1.2. Betti structure in the one dimensional case .....	2
1.3. Betti structure in the higher dimensional case .....	4
1.4. Main goal .....	8
1.5. Acknowledgement .....	10
<b>2. Preliminary</b> .....	11
2.1. Notation and words .....	11
2.2. Beilinson's construction .....	17
<b>3. Good holonomic <math>\mathcal{D}</math>-modules and their de Rham complexes</b> ..	25
3.1. Good holonomic $\mathcal{D}$ -modules .....	25
3.2. De Rham complexes .....	36
<b>4. Some sheaves on the real blow up</b> .....	43
4.1. Holomorphic functions .....	43
4.2. $C^\infty$ -functions .....	47
4.3. Nilsson type functions .....	54
4.4. Push-forward .....	65
4.5. Characterization by growth order .....	69
4.6. Flatness of the sheaf of holomorphic functions with moderate growth .....	79
4.7. Push-forward of good $\mathcal{D}$ -modules and real blow up .....	82
<b>5. Complexes on the real blow up associated to good meromorphic    flat bundles</b> .....	87
5.1. De Rham complexes .....	87
5.2. Duality .....	97

5.3. Functoriality .....	101
5.4. A rigidity property (Appendix) .....	103
<b>6. Good <math>K</math>-structure</b> .....	111
6.1. Good meromorphic flat bundles .....	111
6.2. Good holonomic $\mathcal{D}$ -modules with good $K$ -structure (Local case) .	119
6.3. Good pre- $K$ -holonomic $\mathcal{D}$ -modules .....	122
6.4. Meromorphic flat connections with good $K$ -structure .....	129
6.5. Preliminary for push-forward .....	138
<b>7. <math>K</math>-holonomic <math>\mathcal{D}</math>-modules</b> .....	143
7.1. Preliminary .....	143
7.2. $K$ -Betti structure .....	146
7.3. $K(*D)$ -Betti structure .....	151
<b>8. Functoriality properties</b> .....	157
8.1. Statements .....	157
8.2. Step 1 .....	158
8.3. Step 2 .....	161
8.4. Some resolutions .....	166
8.5. Step 3 .....	170
<b>9. Derived category of algebraic</b>	
<b><math>K</math>-holonomic <math>\mathcal{D}</math>-modules</b> .....	175
9.1. Standard exact functors .....	175
9.2. Push-forward and pull-back .....	177
9.3. Tensor product and inner homomorphism .....	186
9.4. $K$ -structure of the space of morphisms .....	187
<b>Bibliography</b> .....	197
<b>Index</b> .....	203