237

ASTÉRISQUE

1996

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 1994/95
EXPOSÉS 790-804

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque

MAKHLOUF DERRIDJ

La sous-ellipticité pour le problème $\bar{\partial}$-Neumann dans un domaine pseudoconvexe de C^n

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki, exp. n° 790, p. 7-27

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__7_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 790

Novembre 1994

LA SOUS-ELLIPTICITÉ POUR LE PROBLÈME $\overline{\partial}$–NEUMANN DANS UN DOMAINE PSEUDOCONVEXE DE $\mathbf{C}^n$ [d'après D. Catlin]

par **Makhlouf DERRIDJ**

1. INTRODUCTION

Notre but, ici, n'est pas de parler des opérateurs sous-elliptiques en général (voir pour cela des ouvrages d'équations aux dérivées partielles tels que [21], [33], [45]), mais de nous focaliser sur la propriété de sous-ellipticité concernant le problème $\overline{\partial}$-Neumann. Avant tout, nous allons introduire ce problème et dire succinctement pourquoi des spécialistes en Analyse complexe s'y intéressent.

L'opérateur à coefficients constants, $\overline{\partial}$ dans $\mathbf{C}^n$, est donné par :

$$\overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j, \text{ pour } f \text{ fonction } C^1, \text{ où } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\,\frac{\partial f}{\partial y_j}\Big). \tag{1.1}$$

De façon plus générale, en considérant des (p,q)-formes :

$$\begin{cases} u = \displaystyle\sum_{\substack{|I|=p\\ |J|=q}} u_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J, \ u_{IJ} \text{ étant des fonctions } C^1 \\ I = (i_1,\cdots,i_p),\ J = (j_1,\cdots,j_q) \text{ ordonnés ;} \\ \qquad\qquad dz_I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p},\ d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}; \end{cases} \tag{1.2}$$

alors $\overline{\partial}_{p,q} u$ est défini par :

$$\overline{\partial}_{p,q} u = \sum_{\substack{|I|=p\\ |J|=q}} \overline{\partial} u_{IJ} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J. \tag{1.3}$$

On remarquera que p joue le rôle d'un simple paramètre et que donc il suffira de considérer $p = 0$. De toute façon, il suffira de noter $\overline{\partial}_q$ (quel que soit p) l'opérateur précédent.

D'autre part, nous avons considéré des formes de classe C^1. Dorénavant on considérera $\overline{\partial}_q$ opérant sur des formes différentielles à coefficients distributions, c'est-à-dire que l'opérateur $\overline{\partial}$ opère au sens des distributions. Donc nous venons de considérer l'opérateur (en prenant $p = 0$) :

$$\overline{\partial}_q : (0,q)\text{-formes} \longrightarrow (0,q+1)\text{-formes},$$

sans préciser pour le moment l'ouvert sur lequel il agit.

Un premier problème qui peut se poser est l'analogue du problème de Poincaré pour d (ici le complexe de Dolbeault remplace le complexe de de Rham). Pour cela, précisons :

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \text{Soit } \Omega \text{ un ouvert de } \mathbf{C}^n. \text{ Résoudre l'équation :} \\ \overline{\partial}_q u = f \,,\ f\ (0,q+1)\text{-forme dans } \Omega,\ 0 \leq q+1 \leq n. \end{cases}$$

Évidemment, comme $\overline{\partial}_{q+1}\,\overline{\partial}_q = 0$, il est nécessaire que $\overline{\partial}_{q+1} f = 0$. D'autre part, on peut préciser l'espace où se trouve f (du point de vue régularité) et savoir où on peut trouver u.

Comme pour le problème de Poincaré pour d, la condition $\overline{\partial} f = 0$ n'est pas suffisante pour résoudre (1.4) globalement dans Ω. Une hypothèse de pseudoconvexité sera suffisante pour résoudre dans le cadre $C^\infty(\Omega)$ (L. Hörmander [30] ; voir plus loin la définition de cette notion).

Une méthode qui s'est révélée puissante pour attaquer le problème (1.4) est la méthode dite L^2 (signalons évidemment L. Hörmander [30][31], mais aussi C.B. Morrey [44], A. Andreotti-E. Vesentini [1] et bien d'autres). Il s'agit de résoudre le problème :

$$(1.5) \qquad \begin{cases} \overline{\partial}_q u = f \ \text{ dans } \ \Omega \ \text{ avec } f \in L^2_{(0,q+1)}(\Omega) \ \text{ et } \ \overline{\partial}_{q+1} f = 0 \\ u \in L^2_{(0,q)}(\Omega)\,,\ u \perp \operatorname{Ker} \overline{\partial}_q \text{ dans } L^2_{(0,q)}(\Omega). \end{cases}$$

En fait, L. Hörmander a considéré des espaces L^2 avec poids.

Signalons que cette méthode a été utilisée (et s'est révélée féconde) dans nombre de problèmes touchant à l'Analyse et à la Géométrie (Travaux de A. Andreotti - E. Vesentini [1], J.-P. Demailly [16], L. Hörmander [30], [31], J.J. Kohn [35], H. Skoda [49], etc.).

À partir des solutions précédentes, des résultats de régularité pour la solution u donnée dans (1.5) peuvent être déduits de la régularité de f (dans des espaces de Sobolev locaux par exemple).

Pour aller plus loin dans les exigences, on peut se poser le problème de la régularité de u, non seulement dans l'ouvert Ω, mais dans $\overline{\Omega}$ (lorsque Ω est suffisamment régulier), à partir de la régularité de f dans $\overline{\Omega}$.

Pour cela, il s'est révélé utile de considérer un problème associé à $\overline{\partial}_q$, à savoir un problème aux limites pour un "Laplacien complexe" associé à $\overline{\partial}_q$: c'est le problème de Neumann pour $\overline{\partial}$ (à l'ordre q), que nous développons maintenant.

2. LE PROBLÈME DE NEUMANN POUR $\overline{\partial}$. PSEUDOCONVEXITÉ. SOUS-ELLIPTICITÉ

2.1. Le problème $\overline{\partial}$-Neumann

Nous commençons par considérer le complexe de Dolbeault autour du bidegré $(0,q)$, dans Ω, pour $1 \leq q \leq n-1$:

$$C^\infty_{(0,q-1)}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}_{q-1}} C^\infty_{(0,q)}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}_q} C^\infty_{(0,q+1)}(\Omega). \tag{2.1}$$

Comme il est commode de travailler avec des espaces de Hilbert, on peut regarder plutôt le complexe :

$$L^2_{(0,q-1)}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}_{q-1}} L^2_{(0,q)}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}_q} L^2_{(0,q+1)}(\Omega), \tag{2.2}$$

mais où $\overline{\partial}_{q-1}$ et $\overline{\partial}_q$ sont considérés comme opérateurs non bornés dans des espaces de Hilbert, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \overline{\partial}_q : \{u \in L^2_{(0,q)}(\Omega)\, ,\, \overline{\partial}_q\, u \in L^2_{(0,q+1)}(\Omega)\} \longrightarrow L^2_{(0,q+1)}(\Omega) \\ \text{l'espace en accolade étant dit domaine de } \overline{\partial}_q\,; \end{cases} \tag{2.3}$$

ces opérateurs non bornés sont fermés et à domaine dense et se prêtent donc à la théorie abstraite de tels opérateurs.

En particulier, on peut passer aux adjoints $\overline{\partial}^*_{q-1}$, $\overline{\partial}^*_q$. Il y a un lien entre $\overline{\partial}^*_q$ et l'adjoint formel (c'est-à-dire au sens des distributions) de $\overline{\partial}_q$, noté θ_q : $\overline{\partial}^*_q$ est la restriction de θ_q au domaine de l'opérateur non borné $\overline{\partial}^*_q$, noté $\mathcal{D}(\overline{\partial}^*_q)$.

J.J. Kohn a considéré le Laplacien complexe suivant (tel que suggéré par Spencer) :

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \Box_q = \overline{\partial}_{q-1}\,\overline{\partial}^*_{q-1} + \overline{\partial}^*_q\,\overline{\partial}_q : L^2_{(0,q)}(\Omega) \longrightarrow: L^2_{(0,q)}(\Omega). \\ \mathcal{D}(\Box_q) = \{u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}_q) \cap \mathcal{D}(\overline{\partial}^*_{q-1}), \overline{\partial}_q u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}^*_q), \overline{\partial}^*_{q-1} u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}_{q-1})\}. \end{cases}$$

La proposition suivante est élémentaire.

PROPOSITION 2.5.— *Soient* $f \in L^2_{(0,q+1)}(\Omega)$, $\overline{\partial}_{q+1} f = 0$ *et* $u \in L^2_{(0,q+1)}(\Omega)$ *telles que :* $\Box_{q+1} u = f$, $u \in \mathcal{D}(\Box_{q+1})$. $q+1 \leq n$. *Alors* $\overline{\partial}^* u$ *est solution du problème* (1.5) ; $v = \overline{\partial}^* u$ *est dite solution canonique, ou solution de Kohn, du problème* (1.5).

Le problème (2.4) est le problème de Neumann pour $\overline{\partial}$. C'est bien un problème aux limites pour $\Box_q$. Dans le cas où u est assez régulière, la condition abstraite $u \in \mathcal{D}(\Box_q)$ s'écrit de la façon concrète suivante :

Soit Ω, régulier de classe C^∞, borné, donné par la fonction définissante r, *i.e.* :

$$(2.5)\qquad \begin{cases} \Omega = \{r < 0, r \in C^\infty(\mathbf{C}^n)\} \text{ avec } dr \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega = \{r = 0\}. \\ \text{Alors on a :} \\ u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}^*_{q-1}) \Longleftrightarrow u \rfloor \overline{\partial} r = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \\ \overline{\partial}_q u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}^*_q) \Longleftrightarrow \overline{\partial} u \rfloor \overline{\partial} r = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Et donc $u \in \mathcal{D}(\Box_q) \Longleftrightarrow u \rfloor \overline{\partial} r = 0$ et $\overline{\partial} u \rfloor \overline{\partial} r = 0$ sur $\partial\Omega$.

Dorénavant on ne considérera que des domaines Ω, bornés, réguliers, de classe C^∞ (donc donnés par une fonction r telle que ci-dessus).

Comme notre propos, ici, n'est pas de se poser des problèmes d'existence pour (2.4), mais des questions de régularité, donc à s'intéresser à des techniques permettant de l'obtenir, nous passons rapidement à une de ces techniques, à savoir la sous-ellipticité. Faisons tout de même les remarques suivantes :

Remarques : 1) Dans le cas d'un ouvert borné pseudoconvexe, régulier de $\mathbf{C}^n$, l'opérateur $\Box_q$ admet un inverse N_q dit opérateur de Neumann.

2) Il se pose deux problèmes de régularité : la régularité globale dans $\overline{\Omega}$: si $f \in C^\infty_{(0,q)}(\overline{\Omega})$ et $\Box_q u = f$, a-t-on $u \in C^\infty_{(0,q)}(\overline{\Omega})$? Ce qui est en générale une question ouverte, avec cependant des réponses sous certaines hypothèses supplémentaires ; la question locale : $f \in C^\infty_{(0,q)}(\overline{\Omega} \cap V) \overset{?}{\Longrightarrow} u \in C^\infty_{(0,q)}(\overline{\Omega} \cap U)$. Dans le cas global, citons

([6] [8]), en remarquant que le problème de l'existence globale de $u \in C^{\infty}_{(0,q-1)}(\overline{\Omega})$ pour l'équation $\overline{\partial} u = f$, $f \in C^{\infty}_{(0,q)}(\overline{\Omega})$ a été obtenu par J.J. Kohn ([36]).

3) La régularité C^{∞} pour le problème $\overline{\partial}$-Neumann entraîne la régularité C^{∞} du projecteur de Bergman : en effet, si $P : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \cap H(\Omega)$ est le projecteur de Bergman, alors $P = I - \overline{\partial}^* N_1 \overline{\partial}$, où N_1 est l'inverse de $\Box_1$ (voir [34]). Cela entraîne, d'après un théorème de Bell et Ligocka ([3]), une simplification et une généralisation du théorème de Fefferman sur l'extension au bord d'applications biholomorphes, à des domaines bornés, réguliers, faiblement pseudoconvexes.

4) Lorsqu'on prend $u \in \mathcal{D}^{(0,q)}(\Omega)$ (donc à support compact dans Ω), alors $(\Box_q u, u) = \|\overline{\partial}_q u\|^2 + \|\overline{\partial}^*_{q-1} u\|^2$; cette dernière expression montre que la forme quadratique : $Q(u,v) = (\overline{\partial}_q u, \overline{\partial}_q v) + (\overline{\partial}^*_{q-1} u, \overline{\partial}^*_{q-1} v)$ est intimement liée à l'opérateur $\Box_q$. C'est elle qui interviendra dans la définition de la sous-ellipticité.

2.2. La sous-ellipticité pour le problème $\overline{\partial}$-Neumann

La sous-ellipticité est un ingrédient qui permet de montrer la régularité (de la solution considérée) dans des classes de Sobolev près du bord et donc de la régularité C^{∞} jusqu'au bord.

Dorénavant, par simplification d'écriture, $\overline{\partial}_q$ (resp. $\overline{\partial}^*_q$) sera noté $\overline{\partial}$ (resp. $\overline{\partial}^*$).

DÉFINITION 2.2.— *Soit $p \in \partial\Omega$. On dit que le problème $\overline{\partial}$-Neumann vérifie une estimation sous-elliptique (ou encore est sous-elliptique) pour les $(0,q)$-formes, $1 \leq q \leq n-1$, au point p, s'il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage U de p, tels que :*

$$\|u\|_{\varepsilon} \leq C\,(\|\overline{\partial} u\| + \|\overline{\partial}^* u\| + \|u\|), \quad \forall u \in \mathcal{D}^{(0,q)}(U \cap \overline{\Omega}), \tag{2.6}$$

où $\|u\|_{\varepsilon}$ est la norme de Sobolev de u, d'ordre ε dans Ω, et $\mathcal{D}^{(0,q)}(U \cap \overline{\Omega})$ désigne l'espace des $(0,q)$-formes à coefficients dans $\mathcal{D}(U \cap \overline{\Omega})$ et qui sont dans $\mathcal{D}(\overline{\partial}^*)$.

Remarquons que dans la définition précédente on ne précise pas la valeur de ε. Mais il y a des travaux où la valeur de ε est précisée, ce qu'on verra plus loin.

2.3. Forme de Levi, pseudoconvexité

Maintenant nous considérons une fonction définissante r de Ω, comme dans (2.5), ainsi que la forme hermitienne définie par la matrice $\left(\frac{\partial^2 r(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)_{1 \leq j,k \leq n}$, $z \in \overline{\Omega}$.

DÉFINITION 2.3.— *On appelle forme de Levi en z, $z \in \partial\Omega$, la restriction de la forme précédente à l'espace tangent complexe en z à $\partial\Omega$ (c'est-à-dire l'espace des $t \in \mathbf{C}^n$ tels que $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial z_j}(z)\, t_j = 0$).*

Les propriétés de cette forme (telles que signe des valeurs propres, etc.) sont indépendantes du choix de r. Elles sont intrinsèques à $\partial\Omega$. D'où la définition suivante.

DÉFINITION 2.4.— *On dit que $\partial\Omega$ est pseudoconvexe (resp. strictement pseudoconvexe) en $p \in \partial\Omega$ si la forme de Levi en p est positive (resp. définie positive).*

Un théorème, qui commence maintenant à dater, est le suivant :

THÉORÈME 2.5 ([31],[35]).— *Supposons $\partial\Omega$ strictement pseudoconvexe au point $p \in \partial\Omega$. Alors le problème $\overline{\partial}$-Neumann est sous-elliptique au point p pour $1 \leq q \leq n-1$, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$.*

Remarques : 1) En fait, pour $1 \leq q \leq n-1$, une condition nécessaire et suffisante de sous-ellipticité pour les $(0,q)$-formes avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ est donnée dans ([31],[35]), en terme de nombre de valeurs propres de la forme de Levi, qui sont strictement positives (ou strictement négatives).

Nous arrivons maintenant au cœur du sujet, à savoir l'existence d'une estimation sous-elliptique lorsque "la forme de Levi dégénère" tout en étant positive. (Il y a aussi des résultats dans le cas "non pseudoconvexe", [17], [29].)

On commence par parler de "l'article pionnier" de J.J. Kohn dans [37] qui, je pense, a donné naissance à tout un foisonnement de travaux qu'il serait trop long d'énumérer ici.

Avant de parler des travaux de J.J. Kohn dans $\mathbf{C}^2$, introduisons des objets de géométrie différentielle qui rendent compte des propriétés de la forme de Levi : plus précisément, on reliera la forme de Levi à des crochets de certains champs de vecteurs.

Un champ de vecteurs holomorphe, de classe $C^\infty(U)$, où U est un ouvert de $\mathbf{C}^n$, est un champ de la forme : $L = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j}$, avec $a_j \in C^\infty(U)$.

Considérons alors notre domaine Ω et soit U voisinage de $p \in \partial\Omega$. Si r est une fonction définissante (comme en (2.5)), on peut considérer la base de champs de vecteurs holomorphes tangents à $\partial\Omega$, donnée par (ici $\frac{\partial r}{\partial z_1} \neq 0$ sur U) :

$$L_j = \frac{\partial r}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial r}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_1} \qquad j = 2, \cdots, n.$$

Cette base est dite standard, une fois que r est choisie (évidemment, il y a une infinité de telles bases).

Soit alors un champ imaginaire pur T, tangent à $\partial\Omega$ dans U. Il est alors aisé de voir que le système des champs $(L_2, \cdots, L_n, \overline{L}_2, \cdots, \overline{L}_n, T)$ est une base de champs (à coefficients fonctions complexes) tangents à $\partial\Omega$. Ainsi on a :

$$(2.7)\qquad \begin{cases} \text{pour } j,k \in \{2,\cdots,n\} \\ [L_j,\overline{L}_k] = a_{jk}T \quad (\text{modulo } L_2,\cdots,L_n,\overline{L}_2,\cdots,\overline{L}_n),\ a_{jk} \in C^\infty(\partial\Omega \in U). \end{cases}$$

Alors (d'après une formule de Cartan de géométrie différentielle), la matrice hermitienne (a_{jk}) exprime la forme de Levi dans la base ci-dessus choisie. En particulier, la pseudoconvexité (ou la stricte pseudoconvexité) correspond à ce que la matrice $(a_{jk})_2^n$ est positive (ou définie positive).

Dans le cas $n = 2$, il n'y a qu'un champ L (à une fonction non nulle multiplicative près) holomorphe tangent à $\partial\Omega$. Ainsi la matrice de Levi est une fonction.

3. SOUS-ELLIPTICITÉ DANS $\mathbf{C}^2$ (d'après J.J. Kohn [37])

Dorénavant, nous notons, suivant J.J. Kohn, λ la fonction de Levi (associée à L) définie par (2.7) (ici $n = 2$). Le domaine Ω étant pseudoconvexe dans $U \ni p$, $p \in \partial\Omega$, on a $\lambda \geq 0$. Le cas $\lambda > 0$ (stricte pseudoconvexité) étant inintéressant ici, on suppose toujours $\lambda(p) = 0$.

L'idée de J.J. Kohn est de considérer des crochets de longueur plus grande que 2 (au lieu de crochets de longueur 2 figurant dans (2.7)). Il introduit ainsi la :

DÉFINITION 3.1.— *Le type m de $p \in \partial\Omega$ est le plus grand "entier" $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ tel que tout crochet de longueur plus petite que m, formé à partir de L et $\overline{L}$ a une composante sur T nulle en p.*

Remarquons que, si $\lambda \geq 0$, alors le type m de $p \in \partial\Omega$, lorsqu'il est fini, est nécessairement pair.

THÉORÈME 3.2 (J.J. Kohn [37]) .— *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^2$, pseudoconvexe au voisinage du point p et supposons que p est de type m. Alors le problème $\overline{\partial}$-Neumann est sous-elliptique pour les $(0,1)$-formes avec $\varepsilon = \frac{1}{m}$, en p.*

Une inégalité, propre à $\mathbf{C}^2$, qui ramène la question à celle de la sous-ellipticité d'un système de champs de vecteurs réels est la suivante (en notant ici L_1 un champ holomorphe tangent à $\partial\Omega$, L_2 un champ tel que $L_2(r) = 1$ dans U, $T = L_2 - \overline{L}_2$ et $(\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2)$ une base de $(0,1)$-formes, duale de la base $(\overline{L}_1,\overline{L}_2)$ de champs holomorphes dans U) :

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \|\overline{L}_1 u_1\| + \|L_1 u_1\| + \|L_1 u_2\| + \|\overline{L}_1 u_2\| \leq C \quad (\|\overline{\partial} u\| + \|\overline{\partial}^* u\| + \|u\|) \\ \text{où } u = u_1 \overline{\omega}_1 + u_2 \overline{\omega}_2 \ , \ u \in \mathcal{D}^{(0,1)} (\overline{\Omega} \cap U). \end{cases}$$

Une fois (3.3) établie, une application des résultats de J.J. Kohn [39], L. Hörmander [32] et L. Rothschild-E. Stein [47] donne la sous-ellipticité, avec la précision $\varepsilon = \frac{1}{m}$, d'après Rothschild-Stein.

Ce théorème a été complété par P. Greiner [25] qui a établi que $\varepsilon = \frac{1}{m}$ est optimal. D'autre part, J.J. Kohn a donné des exemples de domaines (domaines à forme de Levi diagonalisable au voisinage de p) pour lesquels il y a sous-ellipticité pour les $(0,1)$-formes. Il faut remarquer (dans $\mathbf{C}^n$) que pour les $(0, n-1)$-formes, la sous-ellipticité se traite de façon analogue au cas $\mathbf{C}^2$.

Lorsqu'on veut attaquer le cas n quelconque, l'inégalité (3.3) n'est plus en général satisfaite. J'ai donné une condition nécessaire et suffisante pour cela (voir [17]) dans le cas des $(0,1)$-formes. Donc hormis ce cas d'estimation dite maximale (voir le livre de B. Helffer-J. Nourrigat pour les opérateurs polynômes de champs de vecteurs [28]), la sous-ellipticité des systèmes de champs de vecteurs est insuffisante. Signalons aussi un travail de J. Nourrigat sur cette question [46].

Une première tentative, qui soit autre, est celle de T. Bloom et I. Graham qui étudient le type en terme d'ordre de contact de $\partial\Omega$ (au point considéré) avec des variétés analytiques complexes de dimension q, $1 \leq q \leq n-1$ (en montrant que dans $\mathbf{C}^2$ cela correspond au type de Kohn). La complication dans $\mathbf{C}^n$ vient du fait qu'il y a "plusieurs directions complexes" et qu'on peut alors s'amuser à définir divers types. Signalons-en d'autres (introduits pour résoudre divers problèmes) : il y a évidemment le q-type de D'Angelo [15], qui nous intéresse ici (et qu'on verra en fait sous une forme plus quantitative donnée par D. Catlin pour les besoins de sa démonstration (voir aussi le lien avec [47]), le type essentiel de M.S. Baouendi et F. Trèves [2], etc.). Un autre invariant important que nous verrons ici est le multiple de D. Catlin.

Avant d'aller plus loin dans cet exposé, notons que J.J. Kohn a étudié la sous-ellipticité dans $\mathbf{C}^n$, en terme d'idéaux de fonctions associés à des mineurs (de taille convenable reliée à q) extraits de la forme de Levi ([38]). Il obtient en particulier (en utilisant un travail de K. Diederich et J.E. Fornaess [19]) que le problème $\overline{\partial}$-Neumann est sous-elliptique, pour $1 \leq q \leq n-1$, en tout point du bord d'un domaine borné, pseudoconvexe, analytique réel de $\mathbf{C}^n$.