Astérisque

OLIVIER BIQUARD

Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques

Astérisque, tome 265 (2000)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2000__265__1_0>

ASTÉRISQUE 265

MÉTRIQUES D'EINSTEIN ASYMPTOTIQUEMENT SYMÉTRIQUES

Olivier Biquard

Société Mathématique de France 2000
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

O. Biquard
CMAT, UMR 7640 du CNRS, École polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex.
E-mail : `Olivier.Biquard@math.polytechnique.fr`

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 53C25, 58G30, 53C15, 32L25.

Mots clefs. — Métrique d'Einstein, espace symétrique de rang un, espace de Hölder à poids, structure de contact, métrique quaternion-kählérienne, espace de twisteurs.

MÉTRIQUES D'EINSTEIN ASYMPTOTIQUEMENT SYMÉTRIQUES

Olivier Biquard

Résumé. — Cet article étudie les métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques, ce qui signifie que leur courbure à l'infini est asymptotique à la courbure d'un espace symétrique de rang 1 de type non compact (c'est-à-dire d'un espace hyperbolique). Deux constructions de telles métriques d'Einstein sont réalisées. La première passe par l'analyse et met en correspondance les déformations d'Einstein des espaces hyperboliques complexe, quaternionien et octonionien, avec certaines métriques de Carnot-Carathéodory sur le bord à l'infini. Dans les cas quaternionien et octonionien, on obtient à l'infini des objets que j'appelle des structures de contact quaternioniennes (ou octonioniennes). La seconde construction est au contraire twistorielle : partant d'une structure de contact quaternionienne, analytique réelle, on montre qu'elle est le bord à l'infini d'une unique métrique quaternion-kählérienne (qui est en particulier d'Einstein), définie dans un voisinage de l'infini. La géométrie des structures de contact quaternioniennes est ainsi assez bien comprise, alors que les structures de contact octonioniennes restent un objet très mystérieux.

***Résumé* (Asymptotically symmetric Einstein metrics).** — In this article, I study asymptotically symmetric Einstein metrics : asymptotically symmetric means that the curvature at infinity is asymptotic to the curvature of a rank one symmetric space of noncompact type (that is, a hyperbolic space). Two constructions of such metrics are given. The first one relies on analysis to prove that the Einstein deformations of complex, quaternionic or octonionic symmetric spaces are in 1-1 correspondance with some Carnot-Carathéodory metrics on the boundary at infinity. In the quaternionic or octonionic cases, I get new objects at infinity which I call quaternionic (or octonionic) contact structures. The second construction is twistorial: given a real analytic quaternionic contact structure, I prove that it is the boundary at infinity of a unique quaternionic-Kähler (and therefore Einstein), asymptotically symmetric metric, defined in a neighborhood of infinity. The geometry of quaternionic contact structures is studied, while octonionic contact structures remain very mysterious objects.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Infini conforme des espaces hyperboliques

Les exemples les plus évidents de métrique d'Einstein sont les espaces symétriques, et les plus simples sont les espaces symétriques de rang un. Dans cet article, nous nous intéresserons à ceux de courbure négative, donc de type non compact : il s'agit des espaces hyperboliques $\mathbb{K}\mathbf{H}^m$ ($m \geqslant 2$), où $\mathbb{K}$ est le corps des réels ($\mathbb{R}$), des complexes ($\mathbb{C}$), des quaternions ($\mathbb{H}$), ou l'algèbre des octonions ($\mathbb{O}$) ; dans ce dernier cas, seul le plan hyperbolique de Cayley $\mathbb{O}\mathbf{H}^2$ existe. On notera d la dimension réelle de $\mathbb{K}$ (donc $d = 1, 2, 4$ ou 8) et $n = md$ celle de $\mathbb{K}\mathbf{H}^m$.

La sphère à l'infini $\mathbb{S}^{n-1}$ d'un espace hyperbolique est naturellement munie d'une structure géométrique intéressante, à savoir une métrique de Carnot-Carathéodory conforme. Explicitons cela dans les cas les plus simples.

Espace hyperbolique réel. — L'espace hyperbolique réel peut être réalisé comme la boule unité $\mathbb{B}^n$ de $\mathbb{R}^n$, munie de la métrique (normalisée de sorte que la courbure sectionnelle soit -1)

$$g = 4\frac{\mathrm{euc}}{(1-\rho^2)^2},$$

où euc est la métrique plate de $\mathbb{R}^n$ et ρ le rayon. Cette métrique induit sur le bord $\mathbb{S}^{n-1}$ la métrique

$$\gamma = \lim_{\rho\to 1}(1-\rho^2)^2 g_{\mathbb{S}_\rho}. \tag{0.1}$$

La fonction $t = (1-\rho^2)$ est une fonction qui s'annule exactement à l'ordre un sur le bord (on dira que t définit le bord), et la métrique γ ne dépend du choix d'une telle fonction qu'à un facteur conforme près, si bien que la classe conforme $[\gamma]$ est intrinsèquement définie. On appellera cette classe conforme l'infini conforme de g, expression que je reprends à Le Brun.

Espace hyperbolique complexe. — L'espace hyperbolique complexe peut, quant à lui, être représenté comme la boule unité de $\mathbb{C}^m$, munie de la métrique de Bergmann

$$g = \frac{\mathrm{euc}}{1-\rho^2} + \frac{\rho^2(d\rho^2 + (Id\rho)^2)}{(1-\rho^2)^2}.$$

À la place de l'équation (0.1), qui conduirait à un tenseur très dégénéré sur le bord, on pose

$$\gamma = \lim_{\rho\to 1}(1-\rho^2)g_{\mathbb{S}_\rho}. \tag{0.2}$$

Cette métrique est maintenant infinie, sauf sur la distribution

$$V = \ker\eta \subset T\mathbb{S},$$

où $\eta = Id\rho$ est une 1-forme de connexion sur le $\mathbb{S}^1$-fibré $\mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{C}\mathbf{P}^{m-1}$. Une telle métrique, définie sur une distribution de contact, est appelée une métrique de Carnot-Carathéodory. Comme dans le cas réel, seule la classe conforme $[\gamma]$ est intrinsèquement définie, et nous l'appellerons à nouveau l'infini conforme de g.

Espace hyperbolique général. — Passons maintenant à une description plus générale, valable pour tous les espaces hyperboliques. Un point de base étant fixé, on appelle r la distance à ce point et $\mathbb{S}_r$ la sphère de rayon r. La métrique γ sur la sphère à l'infini $\mathbb{S}^{n-1}$ de l'espace hyperbolique $\mathbb{K}\mathbf{H}^m$ est donnée par la formule

$$\gamma = \lim_{r\to\infty} e^{-2r} g_{\mathbb{S}_r}. \tag{0.3}$$

Cette métrique prend des valeurs infinies, sauf sur une distribution $V \subset T\mathbb{S}$, de codimension 1 dans le cas complexe, 3 dans le cas quaternionien, et 7 dans le cas octonionien ; dans le cas réel, γ est une vraie métrique et $V = T\mathbb{S}$. Comme les crochets d'éléments de V engendrent tous les champs de vecteurs de $\mathbb{S}$, la métrique γ est encore une *métrique de Carnot-Carathéodory* ; la définition (0.3) ne dépend du choix du point de base que par un facteur conforme, donc on appelle encore cette métrique l'*infini conforme de g* (voir la définition plus précise B). On peut décrire la métrique hyperbolique en fonction de données sur le bord : il y a une forme de contact η, à valeurs dans $\mathrm{Im}(\mathbb{K}) = \mathbb{R}, \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^7$, de noyau V, telle que la métrique s'écrive (la courbure sectionnelle étant normalisée entre -4 et -1)

$$g = dr^2 + \mathrm{sh}^2(2r)\eta^2 + \mathrm{sh}^2(r)\gamma. \tag{0.4}$$

Dans le cas réel, il n'y a pas de terme en η^2 ; dans les autres cas, la formule suppose le choix d'un supplémentaire de V dans $T\mathbb{S}$ pour prolonger la métrique γ sur V en une forme quadratique sur $T\mathbb{S}$. Ce supplémentaire est fourni par les fibres de la fibration

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{d-1} & \longrightarrow & \mathbb{S}^{n-1} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{K}\mathbf{P}^{m-1} \end{array}$$

Problème de Dirichlet. — Ces métriques symétriques sont bien entendu des métriques d'Einstein, donc

$$\mathrm{Ric}^g = -\lambda g, \quad \lambda = n-1, n+2, n+8, 36$$

dans les cas réel, complexe, quaternionien, octonionien. Le but de cet article est d'étudier le problème suivant : étant donnée sur le bord une métrique conforme de Carnot-Carathéodory, $[\gamma]$, étudier le problème de Dirichlet non linéaire

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \mathrm{Ric}^g = -\lambda g; \\ &\text{(ii)} \quad \text{l'infini conforme de } g \text{ est } [\gamma]. \end{aligned}$$

Le fait qu'on puisse, comme on le verra, déformer les métriques d'Einstein hyperboliques en résolvant ce problème tranche avec la rigidité qui frappe leurs quotients compacts : Koiso **[Koi78]** a montré que les métriques d'Einstein des quotients compacts des espaces hyperboliques ne peuvent pas être déformées ; dans quelques cas, en dimension 4, on connaît même un résultat de rigidité globale, à savoir que les métriques hyperboliques sur les quotients y sont les seules métriques d'Einstein, à l'action près des difféomorphismes : cela a été montré par Besson, Courtois et Gallot **[BCG95]** dans le cas réel, par Le Brun **[LeB95]** dans le cas complexe. Les quotients de volume fini semblent se comporter de manière similaire **[Biq97]**.

On peut distinguer deux types d'approche au problème (i)-(ii) :

(1) résolution globale de l'équation (i) avec condition à l'infini (ii) : cette approche se fait grâce à des techniques d'analyse globale ;
(2) résolution locale près de l'infini : cette approche, plus algébrique, suppose de renforcer les équations, car le problème (i)-(ii) est un problème de Cauchy sous-déterminé à l'infini.

Dans cet article, on présente deux situations, utilisant les deux types d'approche décrites plus haut, où la résolution du problème permet la construction de nouvelles métriques d'Einstein : la première situation, utilisant des techniques d'analyse, fait l'objet du chapitre I (voir section ci-dessous) ; la seconde situation, utilisant des techniques twistorielles, fait l'objet des chapitres II et III (voir section ci-dessous).

Bref historique

L'idée de poser le problème (i)-(ii) pour comprendre les métriques d'Einstein en termes de métriques de Carnot-Carathéodory sur le bord a ses racines dans des travaux antérieurs, d'une part en géométrie réelle — où l'infini conforme est alors une vraie métrique conforme —, d'autre part en géométrie complexe — pour les métriques de Kähler-Einstein. Développons un peu cet historique.

Géométrie complexe. — Les résultats connus les plus complets concernent la géométrie complexe. Sur une variété complexe, on peut remplacer la condition (i) par la condition plus forte de trouver une métrique Kähler-Einstein ; l'équation ne porte pas sur le tenseur g, mais plutôt sur une fonction qui doit satisfaire une équation de Monge-Ampère complexe, non linéaire. Le problème est complètement résolu par le