

Cours Spécialisés

COLLECTION SMF



**INTRODUCTION À LA
THÉORIE ANALYTIQUE ET
PROBABILISTE DES NOMBRES**

Numéro 1

1 9 9 5

Gérald Tenenbaum

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Comité de Rédaction

Michèle AUDIN
Daniel BARLET (Directeur)
Jean-Benoît BOST
Paul-Louis HENNEQUIN

Rémi LANGEVIN
François LOESER
Joseph OESTERLÉ
Pierre SCHAPIRA

Diffusion

S.M.F. (vente directe)
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05, France

MAISON DE LA S.M.F.
Société Mathématique de France
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 09
France

OFFILIB
48, Rue Gay-Lussac
75240 Paris Cedex 05
France

A.M.S.
American Mathematical Society
P.O. BOX 6248, Providence
Rhode Island 02940, USA

Tarifs

(frais de port non compris)

Prix membre S.M.F. : 300 FF
Prix membre A.M.S. : 400 FF (80\$)
Prix public : 450 FF

Directeur de la publication : R. Langevin
Secrétariat technique de la Rédaction et Administration : Nathalie Christiaën
Couverture : Armelle Stoskopf

© Société Mathématique de France 1995

Introduction
à la théorie analytique
et probabiliste des nombres

Gérald Tenenbaum

Professeur à l'Université Henri Poincaré-Nancy 1

classification AMS : 11-01

A Catherine Jablon,

*pour la douceur du jour,
ce bouquet de symboles
dont ta conversation
éclaire les secrets.*

Table des Matières

Avant-propos	xiii
Notations	xv
Tome I : Méthodes élémentaires	1
Chapitre I.0. Quelques outils d'analyse réelle	3
§ 0.1. La sommation d'Abel	3
§ 0.2. La formule sommatoire d'Euler–Maclaurin	5
Exercices	8
Chapitre I.1. Les nombres premiers	9
§ 1.1. Introduction	9
§ 1.2. Les estimations de Tchébychev	10
§ 1.3. Valuation p-adique de $n!$	13
§ 1.4. Le premier théorème de Mertens	14
§ 1.5. Deux nouvelles formules asymptotiques	15
§ 1.6. La formule de Mertens	17
§ 1.7. Un autre théorème de Tchébychev	19
Notes	20
Exercices	21
Chapitre I.2. Fonctions arithmétiques	23
§ 2.1. Définitions	23
§ 2.2. Exemples	23
§ 2.3. Séries de Dirichlet formelles	25
§ 2.4. L'anneau des fonctions arithmétiques	26
§ 2.5. Les formules d'inversion de Möbius	29
§ 2.6. La fonction de von Mangoldt	30
§ 2.7. La fonction indicatrice d'Euler	32
Notes	34
Exercices	35
Chapitre I.3. Ordres moyens	37
§ 3.1. Introduction	37
§ 3.2. Le problème de Dirichlet et le principe de l'hyperbole	37
§ 3.3. La fonction somme des diviseurs	40
§ 3.4. La fonction indicatrice d'Euler	40

§ 3.5. Les fonctions ω et Ω	42
§ 3.6. Valeur moyenne de la fonction de Möbius et fonctions sommatoires de Tchébychev	43
§ 3.7. Entiers sans facteur carré	47
§ 3.8. Valeur moyenne d'une fonction multiplicative à valeurs dans $[0, 1]$	49
Notes	52
Exercices	54
Chapitre I.4. Méthodes de crible	57
§ 4.1. Le crible d'Ératosthène	57
§ 4.2. Le crible combinatoire de Brun	58
§ 4.3. Application aux nombres premiers jumeaux	61
§ 4.4. Le grand crible – forme analytique	63
§ 4.5. Le grand crible – forme arithmétique	70
§ 4.6. Applications	72
Notes	75
Exercices	78
Chapitre I.5. Ordres extrémaux	82
§ 5.1. Introduction et définitions	82
§ 5.2. La fonction $\tau(n)$	83
§ 5.3. Les fonctions $\omega(n)$ et $\Omega(n)$	85
§ 5.4. La fonction d'Euler $\varphi(n)$	86
§ 5.5. Les fonctions $\sigma_\kappa(n), \kappa > 0$	87
Notes	89
Exercices	90
Chapitre I.6. La méthode de van der Corput	92
§ 6.1. Introduction et rappels	92
§ 6.2. Intégrales trigonométriques	93
§ 6.3. Sommes trigonométriques	94
§ 6.4. Application au théorème de Voronoï	98
Notes	101
Exercices	103
Tome II : Méthodes d'analyse complexe	105
Chapitre II.1. Fonctions génératrices : séries de Dirichlet	107
§ 1.1. Séries de Dirichlet convergentes	107
§ 1.2. Séries de Dirichlet des fonctions multiplicatives	108
§ 1.3. Propriétés analytiques fondamentales des séries de Dirichlet	109