MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MICHEL GRANGER

Géométrie des schémas de Hilbert ponctuels

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 8 (1983)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1983_2_8__1_0>

GÉOMÉTRIE DES SCHÉMAS DE HILBERT PONCTUELS

Michel GRANGER

Résumé : Dans ce travail, on étudie les schémas de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}\{x_1,\dots,x_r\}$ paramétrant les « points épais » de support $\{o\}$ dans $\mathbb{C}^r$, et l'existence de germes de déformations plates d'un type donné de ces points. Pour $r=2$, on montre que tout idéal d'ordre ν de $\mathbb{C}\{x_1,x_2\}$ peut se déformer sur des idéaux de même colongueur n d'ordre $\nu-1$. On en déduit que le lieu singulier de $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}\{x_1,x_2\}$(réduit) paramètre les ideaux d'ordre $\nu\geq 2$. Pour $r\geq 3$, la même méthode (minoration de dimensions) montre qu'une intersection complète n'est presque jamais alignable (déformable en points de dimension de plongement un). Dans la dernière partie on aborde l'étude de la partition en strates (lisses) d'Hilbert Samuel de $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}\{x_1,x_2\}$ et des relations d'incidence entre ces strates.

Summary : In this paper we study Hilbert schemes $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}\{x_1,\dots,x_r\}$ parametrizing « thick points » supported by $\{o\}$ in $\mathbb{C}^r$ and the existence of germs of flat deformations of these points having a given type. For $r=2$, we prove that every ideal of order ν in $\mathbb{C}\{x_1,x_2\}$ can be deformed to ideals of order ν, same colength n. We deduce that the singular locus of $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}\{x_1,x_2\}$(reduced) parametrizes ideals of order ≥ 2. For $r\geq 3$, the same method (minimization of dimensions) shows that almost all complete intersections are non alignable. In the last part we begin to study the partition of $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}\{x_1,x_2\}$ in (smooth) Hilbert-Samuel strata, and incidence relations between them.

Table des Matières

Introduction
Notations 15
Partie 0 Généralités sur les schémas de Hilbert Ponctuels
Description en termes de platificateurs locaux 17
Partie I Singularités des schémas de Hilbert ponctuels $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}\{x_1,\dots,x_r\}$ 25
I Calcul de dimensions d'espaces tangents 25
II Démonstration des relations d'incidence $Z_\nu\subset\overline{Z}_{\nu-1}$ 33
III Le lieu singulier de $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}\{x,y\}_{red}$ 39
IV Quelques exemples explicites de déformations du type $Z_\nu\subset\overline{Z}_{\nu-1}$ 44
V Minoration de la dimension de $\mathrm{Hilb}^n\mathcal{O}_r$, $r\geq 3$ en une intersection complète 51
Partie 2 Relations d'incidence entre les strates d'Hilbert Samuel de $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}\{x,y\}$ 58
VI Etude des conditions nécessaires pour que $Z_T\subset\overline{Z}_T$ 59
VII Etude de $\overline{Z}_\nu$ 64
VIII Etude de l'irréductibilité de $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}\{x,y\}/\mathcal{M}^p)$ 69
Bibliographie 84

Michel GRANGER, Université de Nice, Institut de Mathématiques, Parc Valrose, 06034 NICE CEDEX

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude des déformations plates de "points" ou germe d'espaces analytiques (non réduits !) de dimension zéro, dans un espace analytique complexe X. En pratique, on considère un point z à l'origine de $\mathbb{C}^r$ de longueur $n = \dim_C \mathcal{O}_{z,0}$, et les germes de déformations plates à un paramètre de ce point (les fibres sont alors de longueur constante). On se pose les problèmes suivants :

1) - En premier lieu peut-on <u>lissifier</u> z ? Il s'agit de trouver une déformation dont la fibre générale z_t, $t \neq 0$, soit lisse c'est à dire constituée de n points simples.

Dans les questions 2), 3), 4) on cherche une fibre à support constant $(z_t)_{red} = \{0\}$

2) - Peut on <u>aligner</u> z, c'est à dire trouver z_t de dimension de plongement un (i.e. $\mathcal{O}_{z_t,0} \cong \mathbb{C}[x]/(x^n)$) pour $t \neq 0$?

3) - Peut-on <u>diminuer l'ordre</u> $\nu(z)$, c'est à dire réaliser $\nu(z_t) = \nu(z)-1$, si $\nu(z) \geq 2$? On note ici $\nu(z)$ la multiplicité minimum en $0 \in \mathbb{C}^r$ d'une hypersurface contenant z.

4) - Quels sont les <u>types possibles</u> pour z_t ? On appelle type de z la donnée $(t_0,\dots,t_j,\dots)$ des dimensions des composantes de l'algèbre graduée associée à $\mathcal{O}_{z,0}$.

5) - Si $X \subseteq \mathbb{C}^r$ est un espace analytique contenant z comme sous-espace, étudier les questions 1) à 4) en exigeant en plus que X contienne z_t pour tout t (voir par exemple [B.G.S.] pour $X \subset \mathbb{C}^2$, courbe plane).

Voici un exemple illustrant ces questions

Considérons le point z de longueur 9, défini par un idéal I de $\mathbb{C}\{x,y\}$ engendré par deux polynômes homogènes f et g de degré trois, premiers entre eux. (La dimension sur $\mathbb{C}$ de $\mathcal{O}_{z,0} = \mathbb{C}\{x,y\}/_I$ est la multiplicité d'intersection en zéro de f et g).

Son type est $T_0 = (1,2,3,2,1)$. Les types possibles pour z_t, tels que $\nu(z_t) = \nu(z) - 1 = 2$, sont à chercher parmi les suivants :

$T_1 = (1,2,2,2,1,1)$

$T_2 = (1,2,2,1,1,1,1)$

$T_3 = (1,2,1,1,1,1,1,1)$

Pour fixer les idées supposons $f = y^3 + cx^3$, $g = x^2y$, $c \neq 0$. Il s'agit de trouver $F(x,y,t)$ et $G(x,y,t)$ déformations de f et g, dont la multiplicité d'intersection en zéro pour t fixé reste constante. On trouve facilement une déformation de type T_1 :

$$F = y^3 + cx^3 + txy,\ G = x^2y.$$

et aussi une déformation de type T_3 :

$$F = y^3 + cx^3 + t(y-mx)\ (y-\frac{5m}{8}x)$$

$$G = x^2y - \frac{t}{6m^2}(y-mx)\ (y-4mx),\ \text{avec } c = -\frac{m^3}{4}$$

Par contre une déformation de type T_2 est impossible dès que I ne contient pas d'élément non nul de la forme $(ax + by)^3$, $a,b \in \mathbb{C}$. (cf. Partie 2 VI.4).

Le cadre naturel pour exprimer ces problèmes est celui des schémas de Hilbert ponctuels : L'espace analytique $\mathrm{Hilb}^n X$ paramètre les sous-espaces de dimension zéro et de longueur n de l'espace analytique complexe X. L'existence de $\mathrm{Hilb}^n X$ résulte de théorèmes généraux de A. Douady ([D]) ou, dans un cadre algébrique, de A. Grothendieck ([Gr 1]) : $\mathrm{Hilb}^n X$ est une réunion de composantes connexes de l'espace H(X) paramétrant les sous espaces analytiques de X, construit par A. Douady, et si X est une variété projective, c'est aussi le schéma de Hilbert associé au polynome constant Q=n. Pour étudier les questions 2) à 4) on est amené à introduire le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n A$, d'une algèbre analytique locale d'idéal maximal $\mathcal{M}$. On définit $\mathrm{Hilb}^n A$ comme étant $\mathrm{Hilb}^n Y_A$ où $Y_A = \mathrm{Spec}\ A/\mathcal{M}^n$: On paramètre ainsi les idéaux I de colongueur n de A, ou encore, si $A = \mathcal{O}_{X,x}$ est l'anneau local de X en x, les points z_I de X de support x, de longueur n et d'anneau local $\mathcal{O}_{z_I,x} = \mathcal{O}_{X,x}/I$.

Les questions présentées au début s'énoncent alors en termes de sous ensembles ou "strates" de $\mathrm{Hilb}^n X$ ou de $\mathrm{Hilb}^n\ \mathcal{O}_{X,x}$ et de relation d'incidence entre ces strates. On est ainsi amené à étudier la "géométrie" de $\mathrm{Hilb}^n X$ (resp $\mathrm{Hilb}^n\ \mathcal{O}_{X,x}$) et de ces sous ensembles : Connexité, irréductibilité, détermination des lieux singuliers, calcul ou encadrement des dimensions. L'exemple du début permet par exemple de dire que la strate $Z_{T_0} \subseteq \mathrm{Hilb}^n\ \mathbb{C}\{x,y\}$ paramétrant les idéaux de type T_0 est contenue dans les adhérences des strates Z_{T_1} et Z_{T_3} mais non dans celle de Z_{T_2}.

Précisément nous notons :

- . $W_X \subsetneq \mathrm{Hilb}^n X$ l'ouvert des sous-espaces réduits constitués de n points simples de X.
- . $L \subsetneq U \subsetneq \mathrm{Hilb}^n\, \mathbb{C}\{x_1,\dots,x_r\} \cap \overline{W}_{\mathbb{C}^r}$ les ouverts constitués respectivement par les points alignés et les intersections complètes, contenus dans le fermé des points lissifiables de $\mathrm{Hilb}^n\, \mathbb{C}\{x_1,\dots,x_r\}$.

Les problèmes de la lissification dans X et de l'alignement reviennent alors respectivement à déterminer les adhérences $\overline{W}_X$ et $\overline{L}$ de W_X et L.

Avant de résumer la contribution du présent travail divisé en parties 0, 1 et 2, nous rappelons d'abord quelques résultats connus. Dans ces rappels, nous distinguons le cas de $X=\mathbb{C}^2$, pour lequel on dispose des réponses les plus détaillées.

Signalons auparavant un résultat général de connexité dû à R. Hartshorne ([H]) et J. Fogarty ([F] Proposition 2.2 et 2.3): Si X est connexe, $\mathrm{Hilb}^n X$ est connexe. En particulier, pour toute algèbre analytique locale A, $\mathrm{Hilb}^n A$ est connexe.

Rappels sur $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}^2$ (ou $\mathrm{Hilb}^n F$, F surface lisse) et sur $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}$

Théorème R-1. Si F est une surface lisse, $\mathrm{Hilb}^n F$ est lisse réduit de dimension 2n, connexe si F est connexe.

Ce résultat a été démontré d'abord par Hartshorne (non publié) et Fogarty ([F]) et implique que $\mathrm{Hilb}^n F = \overline{W}_F$, c'est-à-dire que tout point de F est lissifiable : Il suffit de remarquer que W_F est un ouvert lisse de dimension 2n. On trouve dans [B.G] , [Lk] , [S] , des constructions explicites variées d'une lissification des points de $\mathbb{C}^2$.

Le théorème suivant est le résultat principal de $[B_2]$ et s'obtient en démontrant que les points de $\mathbb{C}^2$ sont alignables :

Théorème R-2. (J. Briançon $[B_2]$) L'espace analytique $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}_{red}$ est irréductible de dimension pure n-1.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur une description précise des strates d'Hilbert-Samuel de $\mathrm{Hilb}^n\, \mathbb{C}\{x,y\}$. Rappelons certaines définitions (valables aussi pour $r \geq 3$). On note $\mathcal{O}_r$ l'anneau $\mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_r\}$ et $\mathcal{M}_r$ son idéal maximal:

Définition R-3. On appelle ordre de $f \in \mathcal{O}_r$ l'entier $\nu(f) = \sup\{\nu' \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{M}_r^{\nu'}\}$ et ordre d'un idéal I de $\mathcal{O}_r$ l'entier $\nu(I) = \inf\{\nu(f),\ f \in I\}$, ou encore $\nu(I) = \sup\{\nu' \in \mathbb{N},\ I \subseteq \mathcal{M}_r^{\nu'}\}$

On note $\mathrm{in}\, f$ le polynome homogène de degré $\nu(f)$, appelé partie initiale de f, tel que :

$f - \mathrm{in}\, f \in \mathcal{M}_r^{\nu(f)+1}$, et $\mathrm{in}\, I$ l'idéal engendré par les $\mathrm{in}\, f$ $f \in I$, appelé idéal initial de I . $\mathcal{O}_r/\mathrm{in}\, I$ est l'algèbre graduée (par rapport à $\mathcal{M}_r$) associée à $\mathcal{O}_r/I$.

Définition R-4.

a) On appelle fonction d'Hilbert-Samuel de I la suite $T(I) = (t_0,\ldots,t_j,\ldots)$,

définie par : $t_j = \dim_{\mathbb{C}} \dfrac{\mathcal{M}_r^j + I}{\mathcal{M}_r^{j+1} + I}$

b) Si I est de longueur finie n ($t_j = 0$ pour $j \geq n$ et $\Sigma\, t_j = n$), on appelle strate d'Hilbert-Samuel de I le sous-espace $Z_{T(I)}$ de $(\mathrm{Hilb}^n\, \mathcal{O}_r)_{\mathrm{red}}$, paramétrant les idéaux J de $\mathcal{O}_r$ tels que $T(J) = T(I)$.

Rappelons au passage que I et $\mathrm{in}\, I$ ont la même fonction d'Hilbert-Samuel.

Remarquons que l'ordre $\nu(I)$ d'un idéal I tel que $z_I \in Z_T$ ne dépend que de sa fonction d'Hilbert Samuel $T = T(I)$. On le note $\nu(T)$:

$$j < \nu(T) \Leftrightarrow t_j = \begin{pmatrix} r+j-1 \\ r-1 \end{pmatrix} = \# \{\text{monomes de } \mathcal{O}_r \text{ de degré } j\}$$

Lorsque $r=2$, on a donc $t_j = j+1$ pour $j < \nu$ et on peut montrer que Z_T est non vide si et seulement si T satisfait aux conditions suivantes :

. $\Sigma\, t_j = n$

. Il existe $\nu = \nu(T)$ tel que

$t_j = j+1$ pour $j \leq \nu - 1$

$t_j \geq t_{j+1}$ pour $j \geq \nu - 1$

De plus on a les résultats suivants, démontrés indépendemment par J. Briançon et A. Iarrobino :

Théorème R-5.([B_2] théorème III.3.1, [I_2]. Th.2.12). Lorsque $r=2$, chaque strate d'Hilbert-Samuel Z_T est lisse et connexe de dimension :

$$\dim Z_T = n-\nu - \sum_{j \geq \nu-1} \delta(j)\,[\delta(j)-1]/2$$

où $\delta(j) = t_j - t_{j+1}$.

En particulier $\dim Z_T \leq n-\nu$ et l'égalité $\dim Z_T = n-\nu$ n'a lieu que si, pour tout d, $\delta(d) \leq 1$. Cette condition équivaut au fait que Z_T contient des intersections complètes qui forment alors un ouvert dense de Z_T (cf. Partie 1, remarque II.3.).

Rappels sur $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^r$ et $\mathrm{Hilb}^n\mathcal{O}_r$ pour $r \geq 3$

Dans [I_3] , A. Iarrobino montre que :

$$\dim (\mathrm{Hilb}^n\,\mathcal{O}_r) \geq a(r)\, n^{2-2/r}$$

où $a(r) > 0$ ne dépend que de r, et Briançon et Iarrobino ont montré qu'on a aussi ([B-I]) :

$$\dim \mathrm{Hilb}^n\,\mathbb{C}^r \leq b(r)\, n^{2-2/r}$$

Le résultat de Iarrobino implique que pour tout $r \geq 3$ fixé et n assez grand:

$$\dim \mathrm{Hilb}^n\,\mathbb{C}^r > nr = \dim W_{\mathbb{C}^r}$$

$$\dim \mathrm{Hilb}^n\mathcal{O}_r > (n-1)(r-1) = \dim L$$

Il en résulte que $\mathrm{Hilb}^n\,\mathcal{O}_r$ contient des points z_I qui ne sont pas lissifiables (resp. alignables) et d'autre part que $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^r$ et $\mathrm{Hilb}^n\,\mathcal{O}_r$ sont réductibles, puisque $\overline{W}_{\mathbb{C}^r}$ et $\overline{L}$ respectivement en sont des composantes irréductibles. Ce résultat entraine d'autre part l'existence d'algèbres artinienne de dimension ≥ 2 "presque rigides", c'est à dire n'admettant comme déformations que des algèbres artiniennes, de même type.

Dans [I.E] , Iarrobino et Emsalem donnent explicitement une famille de telles algèbres (avec $n=8$, $r=4$). La dimension de cette famille est égale à $\dim L = (n-1)(r-1)$. Dans le cas d'un point de $\overline{W}_{\mathbb{C}^r}$, on a la minoration suivante, pour la dimension de $\mathrm{Hilb}^n\,\mathcal{O}_r$:

Proposition R-6. (T. Gaffney) Dès que z_I est lissifiable on a :

$$\dim (\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_r, z_I) \geq (n-1)(r-1)$$

Dans le cas général le problème d'une minoration de la dimension locale de $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_r$ reste ouvert.

Considérons le cas particulier des intersections complètes, qui sont évidemment lissifiables : Dans [I4], Iarrobino considère les intersections complètes $(f_1,\ldots,f_r)$ générales de type $(\nu_1,\ldots,\nu_r)$, c'est à dire telles que $\nu(f_i) = \nu_i$ et de colongueur minimale $\nu_{min} = \nu_1\ldots\nu_r$. Il calcule la dimension de l'ensemble $H(\nu_1,\ldots,\nu_r)$ paramétrant ces idéaux et obtient :

Proposition R-7. Pour "presque tout" $(\nu_1,\ldots,\nu_r)$, tel que $\nu_i \geq 2$, $r \geq 3$ (de façon précise différent de $(2,a,b)$, $(3,3,3)$, $(2,2,2,2)$) on a :

$$\dim H(\nu_1,\ldots,\nu_r) \geq (n-1)(r-1) = \dim L.$$

Cette inégalité entraîne que dans presque tous les $H(\nu_1,\ldots,\nu_r)$ les points paramétrant des idéaux alignables ne sont pas denses. Dans la partie 1 (§ V), nous étendons ce résultat à "presque toutes" les intersections complètes.

En résumé on a la situation suivante pour $r \geq 3$ et n assez grand :

$$\overline{L} \subsetneq \overline{U} \subsetneq \overline{W}_{\mathbb{C}^r} \cap \mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_r \subsetneq \mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_r.$$

ce qui contraste avec le cas r=2 où on a :

$$\overline{L} = \mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}\{x,y\}.$$

Partie 0: Dans cette partie, de nature préliminaire, et qui reprend de façon plus systématique la partie 1 de [B.G.S.], nous commençons par donner les propriétés universelles caractérisant $\mathrm{Hilb}^n X$ puis le germe de $\mathrm{Hilb}^n X$ en un point z. Si le support z_{red} de z est $\{x_1,\ldots,x_k\}$ ce germe est isomorphe au produit $\prod_{i=1}^{k} (\mathrm{Hilb}^{n_i} X, z_i)$, où $n_i = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{z,x_i}$ et z_i est le point de X de support $\{x_i\}$ tel que $\mathcal{O}_{z_i,x_i} = \mathcal{O}_{z,x_i}$. On peut donc se contenter d'étudier le germe de $\mathrm{Hilb}^n X$ au voisinage d'un point z_I de $\mathrm{Hilb}^n \mathcal{O}_{X,x}$.

Dans le cas où $(X,x) = (\mathbb{C}^r, 0)$, la propriété universelle caractérisant $(\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}^r, z_I)$ permet de présenter ce germe comme le platificateur local ([H, L, T]) d'un germe de morphisme naturellement associé à un système de générateurs de I et une base sur $\mathbb{C}$ de $C\{x_1,\ldots,x_r\}/_I$ (Proposition 0.4).

Moyennant une inclusion naturelle $\mathrm{Hilb}^n Y \hookrightarrow \mathrm{Hilb}^n X$ pour tout sous-espace Y de X (Proposition 0.1), on en déduit une présentation analogue comme platificateur local de $(\mathrm{Hilb}^n Y, z_{\bar{I}})$, où $Y \subsetneq \mathbb{C}^r$ est un sous-espace analytique contenant O et $\bar{I} = I/_{I_{Y,O}}$ est un idéal de colongueur n de $\mathcal{O}_{Y,O}$. Grâce à un calcul explicite du platificateur d'un germe de morphisme fini donné dans [Gal$_2$] , on a ainsi la possibilité d'exprimer les équations locales d'un schéma de Hilbert au voisinage de tout point et particulièrement les équations du germe de $\mathrm{Hilb}^n Y$ en z_I, comme sous-germe de $(\mathrm{Hilb}^n\ \mathbb{C}^r, z_I)$, si $O \in Y \subset \mathbb{C}^r$ (proposition 0.6). Cette présentation est utilisée dans la partie 1 avec $I_{Y,O} = \mathcal{M}_r^n$.

Partie 1: L'objet de cette partie est l'étude du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n\ \mathcal{O}_r$ ($\mathcal{O}_r = \mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_r\}$) . Dans un premier temps nous déterminons la partie lisse de $\mathrm{Hilb}^n\ \mathbb{C}\{x,y\}$, et si $r \geq 3$ de l'ouvert des intersections complètes de $\mathrm{Hilb}^n\ \mathcal{O}_r$:

<u>Proposition I.2.</u> <u>Si</u> r=2, L <u>est la partie lisse de</u> $\mathrm{Hilb}^n\ \mathbb{C}\{x,y\}$, et <u>si</u> $r \geq 3$, L <u>est la partie lisse de l'ouvert des intersections complètes de</u> $\mathrm{Hilb}^n\ \mathcal{O}_r$ (Rappelons que L paramètre les idéaux isomorphes à $(x_1^n, x_2, \ldots, x_r)$).

Pour démontrer ce résultat on utilise la caractérisation suivante des points singuliers de $\mathrm{Hilb}^n\ \mathcal{O}_r$:

$$\dim T_{z_I}(\mathrm{Hilb}^n\ \mathcal{O}_r) > \dim(\mathrm{Hilb}^n\ \mathcal{O}_r, z_I),$$

où T_{z_I} désigne l'espace tangent de Zariski en z_I. On vérifie aisément que si $z_I \in L$:

$$\dim T_{z_I}(\mathrm{Hilb}^n\ \mathcal{O}_r) = \dim L = (n-1)(r-1).$$

Comme $\mathrm{Hilb}^n\,\mathcal{O}_r$ n'est pas en général réduit, la détermination du lieu singulier de $(\mathrm{Hilb}^n\,\mathcal{O}_r)_{red}$ nécessite d'autres méthodes (cf. Remarque I.6). Dans les trois paragraphes suivants (II, III et IV) on résoud ce problème pour r=2.

On note Z_ν l'ensemble des $z_I \in \mathrm{Hilb}^n\,\mathcal{O}_r$ tels que I soit d'ordre ν et $E_\nu = \bigcup_{\nu' \geq \nu} Z_{\nu'}$ l'ensemble des idéaux d'ordre au moins ν. On voit facilement que E_ν est un sous espace analytique fermé de $\mathrm{Hilb}^n\,\mathcal{O}_r$ (en utilisant par exemple la proposition 0.4). Chaque Z_ν est une réunion de strates d'Hilbert-Samuel :

$$Z_\nu = \bigcup_{\nu(T) = \nu} Z_T \quad , \quad E_\nu = \bigcup_{\nu(T) \geq \nu} Z_T .$$

La démonstration du théorème R.2 consiste à montrer que pour r=2, $\mathrm{Hilb}^n\,\mathbb{C}\{x,y\}_{red} = E_1$ est égal à l'adhérence $\bar{Z}_1$ de Z_1. L'irréductibilité de E_1 résulte alors du fait que, comme r=2, Z_1 coïncide avec $L = Z_{(1,\ldots,1,0\ldots)}$, donc est lisse connexe de dimension n-1 (théorème R5).

Dans le paragraphe II nous généralisons cette "relation d'incidence" $E_1 = \bar{Z}_1$ ce qui répond positivement à une conjecture de J. Briançon ([B_2], V.1.3) :

Théorème II-1. <u>L'espace</u> E_ν <u>est pour</u> r=2, <u>et tout</u> $\nu \in \mathbb{N}^*$ <u>égal à l'adhérence</u> $\bar{Z}_\nu$ <u>de</u> Z_ν.

Ceci donne en particulier pour $\nu = 2$:

$$\bar{Z}_2 = E_2 = \mathrm{Hilb}^n\,\mathbb{C}\{x,y\}_{red} - L$$

Dans le paragraphe suivant nous démontrons alors :

Théorème III-1. <u>Le lieu singulier de</u> $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}\{x,y\}_{red}$ <u>est égal à l'ensemble</u> $\bar{Z}_2 = E_2$ <u>paramétrant les idéaux de</u> $\mathbb{C}\{x,y\}$ <u>d'ordre au moins</u> 2.

Lorsque $I(f_1,f_2)$ est une intersection complète, on peut interpréter n comme étant le nombre de Milnor de (f_1,f_2), (Z,z_I) étant alors une déformation verselle et (Z',z_I) la strate à $\mu = n$ constant. On obtient ainsi tous les cas de non-lissité de cette strate pour les points intersection complète de $\mathbb{C}^2$, en contraste avec le cas des courbes planes où la strate à μ constant est lisse.