BRUNO SEVENNEC

Géométrie des systèmes hyperboliques de lois de conservation

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 56 (1994)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1994_2_56__1_0>

Société Mathématique de France
Mémoire n° 56
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 122, fascicule 1

Géométrie des systèmes hyperboliques de lois de conservation

Bruno Sévennec (*)

Résumé. On étudie les systèmes hyperboliques de lois de conservation en dimension un d'espace. L'espace des états apparait naturellement muni d'une structure affine. Les systèmes physiques possèdent des lois de conservation excédentaires, ou "entropies", et on montre que les propriétés d'intégrabilité des champs de directions propres sont liées à l'existence de ces entropies. La dégénérescence linéaire et la présence d'une entropie non-dégénérée sont deux caractéristiques des systèmes d'origine physique. On montre qu'elles entraînent une propriété de "rigidité" du feuilletage de contact associé au champ linéairement dégénéré, qui est explicitée sur un certain nombre d'exemples. L'étude asymptotique de la stabilité des oscillations permises par la dégénérescence linéaire conduit à la notion d'hyperbolicité globale, que l'on étudie dans le cadre de la géométrie transverse du feuilletage de contact, et pour laquelle des critères généraux sont dégagés, tel le "non-enlacement" de ce feuilletage.

Abstract. We study hyperbolic systems of conservation laws in one space dimension. State space appears naturally endowed with an affine structure. Physical systems posess extraneous conservation laws, the so-called "entropies", and we show that the integrability properties of eigendirection fields are strongly related to the existence of these entropies. Linear degeneracy and existence of a non-degenerate (e.g. strictly convex) entropy are characteristic features of physical systems. We show that they entail a "rigidity" property of the contact foliation associated with the linearly degenerated field, which is evidenced on some examples. In studying stability of oscillations permitted by linear degeneracy, one is led to the notion of global hyperbolicity, which is studied in the framework of contact foliation's transverse geometry. It results in several criteria of global hyperbolicity, such as the "unlinking" of contact foliation, for a certain class of systems.

(*) Texte reçu le 10 février 1993
B. Sévennec, Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, U.M.R. 128 du CNRS, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie,
69364 Lyon cedex 07, (France).

Table des matières

Introduction

Les systèmes hyperboliques de lois de conservation étudiés dans ce travail font partie de la classe plus générale des systèmes quasilinéaires

$$\partial_t v + \sum_{\alpha=1}^{d} A^\alpha(v)\partial_{x_\alpha} v = 0 \ , \ t \in \mathbf{R} \ , \ x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d \ , \ v(x,t) \in V \subset \mathbf{R}^n \tag{0.1}$$

qui sont *hyperboliques*, i.e. les matrices $A(v,\xi) := \sum_{\alpha=1}^{d} \xi_\alpha A^\alpha(v)$ sont diagonalisables à valeurs propres réelles $\lambda_i(v,\xi)$ pour tout ξ dans $\mathbf{R}^d$ et tout v dans V . Il est classique qu'il s'agit d'une condition nécessaire pour que le problème de Cauchy associé au système linéarisé autour de toute solution constante de (0.1) soit bien posé, ou comme on dit, que (0.1) soit "linéairement bien posé". Lorsque de plus $A(v,\xi)$ n'a pas de valeur propre multiple pour $\xi \neq 0$, on dit que (0.1) est *strictement hyperbolique*[1]. On suppose les $A^\alpha(v)$ régulières en v, par exemple C^κ, $\kappa \geq 2$.

L' *espace des états* V est généralement un ouvert de $\mathbf{R}^n$, tandis que "l'espace physique" est celui de la variable x , c'est-à-dire $\mathbf{R}^d$. On se limitera en fait au cas d'une seule dimension d'espace ($d = 1$), qui correspond par exemple à l'étude des ondes planes $v(x,t) = \tilde{v}(\xi{\cdot}x, t)$ pour un système du type (0.1). Soit donc

$$\partial_t v + A(v)\partial_x v = 0 \ , \ x \in \mathbf{R} \ , \ v(x,t) \in V \subset \mathbf{R}^n \tag{0.2}$$

un tel système. Sa non-linéarité fait qu'en général, les solutions classiques (par exemple C^1, ou lipschitziennes) ont un temps d'existence *fini*, et qu'au "temps critique" $t = t_*$ apparaît dans la solution une *singularité*, plus précisément $\sup_x |\partial_t v| \to \infty$ pour $t \to t_*$ (cf. par exemple [A2, Ba, Jn, Lax4, Lax5, Li5]). On ne peut prolonger la solution pour $t > t_*$ qu'en faisant naître une *discontinuité* de $v(\cdot, t)$.

Mais l'équation (0.2) n'a plus de sens, même dans $\mathcal{D}'$, si v est discontinue : c'est le problème bien connu "$\mathrm{sgn}(x).\delta_0(x)$". Pourtant les systèmes du type (0.2) ont une origine physique qui montre que des solutions discontinues "existent". L'exemple historique est celui de la dynamique des gaz, étudié depuis plus d'un siècle [Sto, Rie, Ran, Str1], mais beaucoup d'autres ont été découverts depuis : élasticité non-linéaire, câbles élastiques, circulation automobile, électromagnétisme non-linéaire, magnétohydrodynamique, chromatographie, électrophorèse, "modulations lentes" des solutions quasi-périodiques d'EDPs non-linéaires dispersives, etc....

[1] Pour certaines valeurs de (n,d) cette condition n'est *jamais* réalisée [Lax6, F-R-S], par exemple si $d = 3$ et $n \not\equiv 0, \pm 1 \bmod 8$.

Il s'avère que les systèmes correspondants sont toujours l'expression de *lois de conservation*, c'est-à-dire s'écrivent dans le cas d'un système du type (0.1) :

$$\partial_t u + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_{x_\alpha} f^\alpha(u) = 0 \ , \ u(x_1, \ldots, x_d, t) \in U \subset \mathbf{R}^n \tag{0.3}$$

et dans le cas $d = 1$ considéré ici [2]:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \ , \ u(x,t) \in U \subset \mathbf{R}^n \ . \tag{0.4}$$

L'équation (0.3) entraîne immédiatement que pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ à bord régulier, de normale sortante ν, on a

$$\partial_t \int_\Omega u(x,t)dx + \int_{\partial\Omega} \nu(x) \cdot f(u(x,t))dx = 0 \tag{0.5}$$

avec $\nu \cdot f(u) := \sum_{\alpha=1}^{d} \nu_\alpha f^\alpha(u) \in \mathbf{R}^n$, c'est-à-dire que les "quantités de u_i" ($i = 1, \ldots, n$) sont localement *conservées*, (d'où la terminologie) : la variation de la "quantité totale de u_i" dans Ω ne dépend que de ce qui se passe sur le bord. Cela justifie aussi l'appellation de "flux" pour les fonctions f_i^α, que l'on peut considérer comme définissant des $(n-1)$-formes différentielles $\sum_{\alpha=1}^{d}(-1)^\alpha f_i^\alpha(u)dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_\alpha} \wedge \ldots \wedge dx_d$ sur $\mathbf{R}^d$ dépendant de $u \in U$.

On peut alors considérer des solutions discontinues : il suffit d'observer que le membre de gauche de (0.3) a un sens en tant que distribution dès que $(x,t) \mapsto u(x,t)$ est mesurable et (localement) bornée, et en particulier pour des u discontinues. On parle alors de *solution faible* de (0.3).

Un peu de réflexion montre cependant que tout ne peut pas aller aussi facilement : ces systèmes décrivent des phénomènes physiques *irréversibles* (la dynamique des gaz par exemple), irréversibilité dont les formulations (0.3),(0.4) ne gardent aucune trace puisque $u(x,-t)$ est solution si et seulement si $u(-x,t)$ l'est.

De fait, même pour l'équation scalaire ("équation de Burgers", $n = d = 1$)

$$\partial_t u + \partial_x (u^2/2) = 0 \tag{0.6}$$

on s'assure facilement de la *non-unicité* des solutions faibles du problème de Cauchy, en considérant par exemple les deux solutions faibles distinctes $u, \tilde{u}$, égales pour $t < 0$ et données par :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 0 \\ \tilde{u}(x,t) &= \begin{cases} \mathrm{sgn}(x) & \text{si } |x| < t/2 \\ 0 & \text{si } |x| > t/2. \end{cases} \end{aligned}$$

[2]On peut trouver dans [Gel] une très jolie motivation "naturelle" à l'étude de ces systèmes

On doit donc imposer une *condition d'admissibilité* aux solutions faibles, qui a pour but de rétablir l'unicité, en incorporant d'une manière ou d'une autre l'irréversibilité nécessaire [3].

Une telle condition restaurant l'unicité dans tous les cas reste à découvrir, même pour $d = 1$ et s'agissant du *problème de Riemann* [Rie] : étant donné deux états u^-, u^+ il s'agit de trouver une solution u au problème de Cauchy avec donnée initiale discontinue $u(x,0) = u^\pm$, $\pm x > 0$, de la forme $u(x,t) = \tilde{u}(x/t)$ (c'est obligatoire s'il y a unicité, compte tenu de l'invariance du problème par homothéties).

C'est Lax, dans son article [Lax2], qui a le premier formulé une telle condition d'admissibilité. Elle concerne les discontinuités des solutions "régulières par morceaux" d'un système (0.4) *strictement hyperbolique.* Dans le cas de la dynamique des gaz, cette condition exprime l'accroissement de l'entropie physique des particules traversant l'onde de choc, et on l'appellera "condition d'entropie pour les chocs" ou "condition de Lax".

Cette condition lui permet de démontrer, pour une large classe de systèmes (ceux qui sont "convexes" en un certain sens), l'existence et l'unicité d'une solution continue par morceaux du problème de Riemann lorsque les états u^-, u^+ sont proches.

Depuis lors, un grand nombre de conditions d'admissibilité ont été dégagées, s'appliquant soit au problème de Riemann et aux solutions faibles u de classe VB de (0.3),(0.4) (cf. [Daf1, Daf4, Li2] et aussi [Daf2, Li6] pour une présentation générale), soit aux solutions faibles $u \in L^\infty$ [Fri-L, Lax3].

On peut aussi mentionner l'approche par "viscosité évanescente" [Gel], où l'on considère par exemple (0.4) comme "limite" pour $\varepsilon \to 0$ du système *parabolique*

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon \partial_x (B(u) \partial_x u) \tag{0.7}$$

avec $B(u)$ matrice (définie) positive. Cette approche conduit à la notion de "profil visqueux" ou "structure" pour un choc et à une autre condition d'admissibilité, étudiée par exemple dans [Ger, Go1, Go2, Go3, Vv, Dy] et plus récemment dans [Co-S1, Co-S2, Fre1, Fre2, Mo2, Mo4]. On est alors conduit à étudier les liaisons entre points critiques pour certaines familles de champs de vecteurs, à l'aide d'outils topologiques (théorie de Morse, indice de Conley, ...).

Une des seules conditions gardant un sens pour $u \in L^\infty$ est la "condition d'entropie" introduite par Lax et Friedrichs [Fri-L, Lax3]. Elle fait intervenir la notion d'*entropie* d'un système quasilinéaire (0.1) : c'est par définition la densité d'une quantité conservée localement par les solutions *régulières* de (0.1), c'est-à-dire une fonction $E : V \to \mathbf{R}$ vérifiant

$$dE(v).A^\alpha(v) = dF^\alpha(v) \ , \ \alpha = 1, \ldots, d \tag{0.8}$$

[3] Dans le cas de la dynamique des gaz, la nécessité d'une condition d'admissiblité pour les chocs est connue depuis un siècle (cf. [Str2, Rie, Jou])

pour des "flux d'entropie" $F^\alpha : V \mapsto \mathbf{R}$ convenables, de sorte que pour toute solution régulière de (0.1), on ait

$$\partial_t E(v) + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_{x_\alpha} F^\alpha(v) = 0 \tag{0.9}$$

(la terminologie vient du cas de la dynamique de gaz, où –l'opposé de– la densité d'entropie physique joue ce rôle). Par exemple, un système de lois de conservation (0.3) admet pour entropies "triviales" toutes les restrictions à U des fonctions *affines*. De plus, tous les systèmes d'origine physique possèdent apparemment au moins une entropie "supplémentaire" (non-affine...), dotée de certaines propriétés de *convexité* [Daf3]. Dans le cas $d = 1$, c'est-à-dire pour un système (0.4) d'origine physique, il en existe en fait toujours une *convexe*, et même *fortement convexe*, c'est-à-dire que D^2E est partout définie positive. Ceci a des conséquences importantes pour le système (0.4) : cela entraîne par exemple son hyperbolicité, et en fait sa *symétrisabilité* (voir [Go3, Go4, Fri-L, Bo2, Bo3], et aussi chapitre II). On en rencontrera un certain nombre d'autres dans la suite.

La *condition d'entropie* de Lax et Friedrichs pour une solution faible u mesurable bornée est alors obtenue en remplaçant pour E convexe l'égalité (0.9) par l'inégalité dans $\mathcal{D}'$:

$$\partial_t E(u) + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_{x_\alpha} F^\alpha(u) \leq 0\ . \tag{0.10}$$

Le seul résultat général d'unicité dans L^∞ de la théorie, dû à Kružkov [Kru], utilise cette condition. Il concerne le cas scalaire ($n = 1$), et est accompagné du résultat d'existence globale correspondant, obtenu par une régularisation parabolique analogue à (0.7). Il faut aussi citer le résultat d'unicité dans VB ($n = 1$), dû à Oleinik [Ole3], basé sur des arguments très différents (de "dualité", *cf* aussi [Sm] pour une généralisation à certains systèmes 2×2, dans la classe des solutions continues par morceaux).

Un autre résultat partiel d'unicité dans VB est dû à DiPerna [DiP4], et concerne les systèmes de deux équations à une dimension d'espace ($n = 2, d = 1$). Dans L^∞, le problème de l'unicité quand $n > 1$ est complètement ouvert [4].

Concernant l'existence globale (en temps) de solutions, le résultat central est le célèbre théorème de Glimm [Gl], raffiné par Liu [Li4] et dans une autre direction par [K-T]. Ce théorème fournit lorsque $d = 1$ l'existence globale d'une solution VB pour des données initiales "petites" (dans VB). Le cas de données initiales non "petites" reste limité (via une adaptation de la démonstration de Glimm) à des systèmes particuliers [Ni-Sm, DiP2, Li3, Sm]. Le cas $d > 1, n > 1$ est ouvert.

[4]Voir à ce sujet [Mo4], qui met sérieusement en doute le fait que l'on puisse obtenir l'unicité en toute généralité, même pour des solutions régulières par morceaux du problème de Riemann et des systèmes "non-pathologiques".

On étudie dans ce travail la *géométrie* des systèmes hyperboliques de lois de conservation, en se basant sur les caractéristiques communes des exemples fournis par la physique. Cette étude géométrique paraît être un préalable nécessaire si on veut se passer des hypothèses de "petitesse", par exemple dans le théorème d'existence de Glimm ou le problème de Riemann (voir [Ni-Sm, Sm, Li1, Li3, K-K2] pour des cas particuliers), ou encore le théorème d'apparition nécessaire de singularités de John-Liu [Jn, Li5]. C'est aussi le cas si on veut comprendre la structure des oscillations, i.e. le comportement d'une suite faiblement convergente (u^ε) de solutions (*cf* [Ser3, Ser11, Ser12, Ser13], et aussi le chapitre II.2.7). On pourrait citer de nombreux autres exemples, comme l'étude des points "ombilicaux" et de changement de type (hyperbolique-elliptique), où des valeurs propres viennent en coïncidence [K-K1, K-K3, I-M-P, Fre3], de la géométrie globale de l'ensemble de Rankine-Hugoniot [Fre1], ou encore de la "résonance non-linéaire" [Ma-R, Ma-R-S, Peg, Jo-M-R1, Jo-M-R2]. On peut dire que généralement, la compréhension globale d'un problème (EDP) non-linéaire passe par celle de la géométrie (ou topologie) différentielle sous-jacente.

Dans le chapitre I, on étudie les contraintes locales (différentielles) imposées à la géométrie des champs de directions propres – et plus généralement à l'espace des états lui-même – par le système hyperbolique de lois de conservation qui y est défini. La géométrie affine apparaît immédiatement de façon naturelle. On donne une caractérisation des systèmes quasilinéaires admettant une forme conservative (thm. 4), en termes de l'existence d'une connexion affine plate (i.e., localement, une structure affine) "compatible" avec le système en un certain sens. Cette caractérisation est malheureusement peu pratique, du fait de la complexité des équations (non-linéaires) exprimant l'annulation de la courbure.

On y voit aussi que la présence d'entropies supplémentaires non-triviales a des conséquences directes sur les propriétés d'"intégrabilité" des champs de directions propres. Celles-ci se manifestent par l'existence de coordonnées (non-conservatives) dans lesquelles le système s'écrit sous la forme (0.2) avec A triangulaire par blocs.

Ainsi, par exemple, un système $n \times n$ ayant une entropie non-dégénérée et $n-1$ invariants de Riemann en admet en fait n, i.e. est diagonalisable (cor. 9) (l'existence d'une entropie non-dégénérée est essentielle dans ce résultat). Pour le système 3×3 de la dynamique des gaz, qui admet une telle entropie, on peut vérifier qu'il y a soit un seul invariant de Riemann, soit trois pour certaines lois d'état très particulières (telles que la vitesse du son c soit fonction de la pression p). Un résultat du même type (cor. 10) affirme qu'un système possédant n entropies à hessiennes indépendantes est diagonalisable. Il suffit même de *trois* entropies "en position générale".

Ces propriétés (entropies supplémentaires, intégrabilité) sont "non-génériques" pour un système hyperbolique de lois de conservation, mais présentes dans les exemples d'origine physique, et on a cherché à en tirer les conséquences