

*quatrième série - tome 49      fascicule 1      janvier-février 2016*

*ANNALES  
SCIENTIFIQUES  
de  
L'ÉCOLE  
NORMALE  
SUPÉRIEURE*

Dominique CERVEAU & Alcides LINS NETO & Marianna  
RAVARA-VAGO

*Feuilletages holomorphes de codimension 1 :  
une étude locale dans le cas dicritique*

---

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

# Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

---

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

## Responsable du comité de rédaction / *Editor-in-chief*

Antoine CHAMBERT-LOIR

### Publication fondée en 1864 par Louis Pasteur

Continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE  
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY  
de 1889 à 1900 par C. HERMITE  
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX  
de 1918 à 1941 par É. PICARD  
de 1942 à 1967 par P. MONTEL

### Comité de rédaction au 1<sup>er</sup> janvier 2016

N. ANANTHARAMAN I. GALLAGHER  
P. BERNARD B. KLEINER  
E. BREUILLARD E. KOWALSKI  
R. CERF M. MUSTAȚĂ  
A. CHAMBERT-LOIR L. SALOFF-COSTE

## Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,  
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.  
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.  
[annales@ens.fr](mailto:annales@ens.fr)

---

### Édition / *Publication*

Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré  
11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05  
Tél. : (33) 01 44 27 67 99  
Fax : (33) 01 40 46 90 96

### Abonnements / *Subscriptions*

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 09  
Fax : (33) 04 91 41 17 51  
email : [smf@smf.univ-mrs.fr](mailto:smf@smf.univ-mrs.fr)

### Tarifs

Europe : 515 €. Hors Europe : 545 €. Vente au numéro : 77 €.

---

© 2016 Société Mathématique de France, Paris

En application de la loi du 1<sup>er</sup> juillet 1992, il est interdit de reproduire, même partiellement, la présente publication sans l'autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

*All rights reserved. No part of this publication may be translated, reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any other means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without prior permission of the publisher.*

# FEUILLETAGES HOLOMORPHES DE CODIMENSION 1: UNE ÉTUDE LOCALE DANS LE CAS DICRITIQUE

PAR DOMINIQUE CERVEAU, ALCIDES LINS NETO  
ET MARIANNA RAVARA-VAGO

---

**RÉSUMÉ.** – Nous décrivons les singularités de feuilletages holomorphes *dicritiques* de petite multiplicité en dimension 3. En particulier nous relierons l'existence de déformations et de déploiements non triviaux à des problèmes d'intégrabilité liouvillienne.

**ABSTRACT.** – We describe the singularities of *dicritical* holomorphic foliations of small multiplicity in dimension 3. In particular we connect the existence of non trivial deformations and deployments to problems of Liouvillian integrability.

## 1. Introduction

On se propose dans cet article de donner la description de certains germes de feuilletages holomorphes de codimension un à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ . Un tel feuilletage  $\mathcal{F}$  est associé à la donnée d'une 1-forme holomorphe  $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ , définie à unité multiplicative près, satisfaisant la condition d'intégrabilité de Frobenius  $\omega \wedge d\omega = 0$  et dont le lieu singulier  $\text{Sing } \omega = \text{Zéros}(\omega)$  est de codimension supérieure ou égale à deux. On note  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$  et  $\text{Sing } \mathcal{F} = \text{Sing } \omega$ . La condition d'intégrabilité est non linéaire en les coefficients de  $\omega$ , ce qui rend difficile la construction d'exemples par des procédés calculatoires. Il y a essentiellement deux manières simples pour construire de tels exemples. La première consiste à se donner un germe  $\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)$  en dimension 2 (dans ce cas la condition d'intégrabilité est triviale), une application holomorphe  $F : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$  dominante et à considérer  $\omega = F^*\omega_0$  qui est automatiquement intégrable ; les feuilles du feuilletage  $\mathcal{F}_\omega$  sont alors fibrées par les niveaux de  $F$ . Un tel feuilletage sera dit de type *pull-back* ; on peut d'ailleurs généraliser cette procédure en considérant un feuilletage  $\mathcal{F}_0$  d'une surface  $S_0$ , éventuellement singulière, et une application méromorphe  $F : \mathbb{C}^n \dashrightarrow S_0$  (typiquement la projection naturelle  $\mathbb{C}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ) et en « rappelant »  $\mathcal{F}_0$  par  $F$ . L'autre manière est de considérer les feuilletages  $\mathcal{F}_\theta$  associés aux 1-formes méromorphes  $\theta$  fermées :  $d\theta = 0$ . Comme nous le rappellerons une telle forme s'écrit :

$$\theta = \sum \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + dh$$

où les  $f_i$  sont holomorphes,  $h$  méromorphe et les *résidus*  $\lambda_i$  des nombres complexes. Essentiellement les feuilles de  $\mathcal{F}_\theta$  sont les niveaux de la fonction multivaluée  $\sum \lambda_i \log f_i + h$ . Ceci n'est pas sans rappeler la conjecture, concernant cette fois les feuilletages globaux, suivante :

CONJECTURE (Brunella, Lins Neto *et al.* [10]). – Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe de codimension un sur une variété projective  $X$ . Alors ou bien  $\mathcal{F}$  est transversalement projectif (sur un ouvert de Zariski) ou bien il existe  $F : X \dashrightarrow S$  une application rationnelle vers une surface  $S$  et un feuilletage  $\mathcal{G}$  de  $S$  tels que  $\mathcal{F} = F^*\mathcal{G}$ .

Pour éclairer cette conjecture disons que parmi les feuilletages transversalement projectifs il y a les feuilletages donnés par une 1-forme fermée méromorphe ou les feuilletages transverses à une fibration rationnelle (sur un ouvert de Zariski fibré). Ils sont donnés par une 1-forme rationnelle  $\omega_0$  pour laquelle existent deux autres 1-formes rationnelles  $\omega_1, \omega_2$  formant un  $SL(2, \mathbb{C})$  triplet [10, 20] :

$$d\omega_0 = \omega_0 \wedge \omega_1, \quad d\omega_1 = \omega_0 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Soit  $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$  un germe de 1-forme intégrable,  $\omega = \sum a_i dz_i$  ; si l'ensemble singulier  $\text{Sing } \omega := \{a_1 = \dots = a_n = 0\}$  est suffisamment petit,  $\text{Cod Sing } \omega \geq 3$ , le théorème de Frobenius de B. Malgrange assure l'existence d'une intégrale première non constante  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0) : \omega = gdf, g \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n, 0)$  ; ici les feuilles sont les niveaux de  $f$ . On pourrait penser que cela décrit la situation générique (pour la topologie de Krull), mais il n'en est rien : on sait en effet depuis Kupka et Reeb [17] que la condition  $d\omega(0) \neq 0$  implique que le lieu singulier est lisse de codimension deux et cette propriété est stable. Nous précisons dans le texte ce phénomène bien connu et nous présentons la classification des 1-formes intégrables dont le 1-jet est non trivial suivant les travaux de [12, 17, 19]. Une grande partie du travail que nous proposons repose sur l'idée naïve suivante ; si l'on procède au développement de Taylor de  $\omega$  :

$$\omega = \omega_\nu + \omega_{\nu+1} + \dots + \omega_k + \dots$$

où chaque  $\omega_k$  est une 1-forme homogène de degré  $k$ , i.e. à coefficients polynômes homogènes de degré  $k$ , et  $\omega_\nu$  est la *partie homogène de plus bas degré non nulle*, alors la partie initiale  $\text{In}(\omega) = \omega_\nu$  de  $\omega$  est intégrable. Mieux, il y a une homotopie de 1-formes intégrables

$$\omega_t = \omega_\nu + t\omega_{\nu+1} + \dots + t^k\omega_{\nu+k} + \dots, \quad t \in \mathbb{C}$$

reliant  $\omega = \omega_{t=1}$  à sa partie initiale  $\omega_{t=0} = \text{In}(\omega)$ . On peut donc espérer, modulo des conditions raisonnables sur  $\omega_\nu$ , que la 1-forme  $\omega$ , que l'on voit donc comme une déformation de  $\omega_\nu$ , va conserver certaines propriétés de sa partie initiale  $\text{In}(\omega)$ . Pour présenter nos résultats nous avons besoin de quelques notations et rappels. On désigne par  $R$  le champ *radial*,  $R = \sum z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ . Une 1-forme homogène intégrable  $\omega_\nu$  est dite *dicritique* si le polynôme  $P_{\nu+1} = i_R \omega_\nu$  est identiquement nul ; elle est *non dicritique* sinon. Une forme dicritique induit un feuilletage sur l'espace projectif  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ , tandis que le feuilletage homogène associé à une forme non dicritique est défini par une 1-forme fermée rationnelle : en effet  $\frac{\omega_\nu}{P_{\nu+1}}$  est fermée. Modulo des conditions génériques portant sur  $\omega_\nu$ , ces propriétés sont gardées en mémoire par les  $\omega$  telles que  $\text{In}(\omega) = \omega_\nu$ . Ainsi, dans le cas non dicritique, si  $[P_{\nu+1} = 0] \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$  est réduit et à croisement normaux, alors  $\mathcal{F}_\omega$  est encore défini par une 1-forme fermée méromorphe dès que les résidus  $\lambda_i$  de  $\omega_\nu = \text{In}(\omega)$  satisfont une condition générique (satisfaite

sur un ouvert dense); de même si  $[P_{\nu+1} = 0]$  est irréductible de degré  $p^s$ , avec  $p$  premier et  $n \geq 3$  [11]: en fait dans ce cas  $\omega$  possède une intégrale première holomorphe non constante.

Dans le cas dicritique et en dimension 3, on démontre dans [1] que si  $d\omega_\nu = d(\text{In}(\omega))$  est à singularité isolée et  $\nu \geq 3$ , alors les feuilletages  $\mathcal{F}_{\omega_\nu}$  et  $\mathcal{F}_\omega$  sont holomorphiquement conjugués, ce que l'on peut interpréter comme un résultat de *détermination finie* ou de stabilité (pour la topologie de Krull).

Nous nous intéressons dans cet article à des feuilletages  $\mathcal{F}_\omega$  dont la partie homogène  $\omega_\nu = \text{In}(\omega)$  ne satisfait plus les conditions précédentes. Si  $\omega_\nu$  est une 1-forme homogène intégrable dicritique, on note  $[\mathcal{F}_{\omega_\nu}]$  le feuilletage de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$  associé; si  $\text{Cod Sing } \omega_\nu \geq 2$ , c'est un feuilletage de degré  $\nu-1$ . Rappelons qu'un point *central* (ou une singularité de *type centre*) pour un feuilletage  $\mathcal{G}$  du plan est un point singulier  $m$  en lequel  $\mathcal{G}$  possède une intégrale première de Morse; toujours en dimension 2, un point singulier  $m$  est dit *nilpotent* si  $\mathcal{G}_{,m}$  est défini par un germe de 1-forme dont la partie initiale est de type  $x dx$ . Le point singulier  $m$  est dit *d'ordre*  $\geq 2$  si  $\mathcal{G}_{,m}$  est défini par une 1-forme à 1-jet nul.

Les résultats qui suivent sont propres à la dimension 3, première dimension où la condition d'intégrabilité est non triviale.

**THÉORÈME PRINCIPAL.** – *Soit  $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$  holomorphe intégrable. On suppose que la partie initiale  $\text{In}(\omega) = \omega_\nu$  est dicritique et satisfait  $\text{Cod Sing } \omega_\nu \geq 2$ . Alors :*

1. *Si  $\nu = 1$ ,  $\mathcal{F}_\omega$  est holomorphiquement conjugué à  $\mathcal{F}_{\omega_1}$ ,  $\omega_1 = z_2 dz_1 - z_1 dz_2$ ; en particulier  $\mathcal{F}_\omega$  possède une intégrale première méromorphe  $\frac{Z_1}{Z_2}$  ( $Z_i$  coordonnées).*
2. *Si  $\nu = 2$ ,  $\mathcal{F}_\omega$  est donné par une 1-forme fermée méromorphe.*
3. *Si  $\nu \geq 3$  et  $[\mathcal{F}_{\omega_\nu}]$  n'a ni singularité nilpotente, ni centre, ni singularité d'ordre  $\geq 2$ , alors  $\mathcal{F}_\omega$  est conjugué à  $\mathcal{F}_{\omega_\nu}$ .*
4. *Si  $\nu = 3$  et  $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$  a une singularité de type centre, alors  $\mathcal{F}_\omega$  est défini par une 1-forme fermée méromorphe.*
5. *Si  $\nu = 3$  et  $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$  a une singularité nilpotente alors, modulo une condition de non-résonance portant sur  $\omega_3$ ,  $\mathcal{F}_\omega$  est défini par une 1-forme fermée méromorphe ou bien  $\mathcal{F}_\omega$  est conjugué à  $\mathcal{F}_{\omega_3}$ .*
6. *Si  $\nu = 3$  et  $\mathcal{F}_{\omega_3}$  a une singularité d'ordre  $\geq 2$ , alors  $\mathcal{F}_\omega$  est transversalement affine, i.e.  $d\omega = \omega \wedge \omega_1$ , avec  $\omega_1$  méromorphe fermée.*

Dans le théorème principal, nous avons rassemblé divers énoncés qui apparaissent dans le texte. Par souci de cohérence nous avons inséré dans le théorème des résultats bien connus: c'est le cas des points 1 et 2. Le point 3 contient le résultat de Camacho-Lins Neto [1]. Le point 4 fait intervenir un résultat d'intégration liouvillienne remarquable démontré en 1908 par Henri Dulac [14]. Le point 5 nécessite une étude fine des déploiements des feuilletages du plan à singularité nilpotente. Cette étude est rendue possible par l'utilisation du Théorème de Préparation de F. Loray [19]. À titre d'exemple, on démontre que si  $\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)$  est à singularité nilpotente et à nombre de Milnor  $\mu(\omega_0; 0)$  de type  $p-1$  avec  $p$  premier, alors tout déploiement  $\mathcal{F}_\omega$  de  $\mathcal{F}_{\omega_0}$  à singularité nilpotente ( $\text{In}(\omega) = \text{In}(\omega_0)$ ) est trivial ou bien