

**GREY RADIATIVE
HYDRODYNAMICS**

—

**HIERARCHY OF MODELS AND
NUMERICAL APPROXIMATION**

Bruno Després & Christophe Buet



Panoramas et Synthèses

Numéro 28

2009

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Comité de rédaction

Franck BARTHE
Nicolas BERGERON
Tien-Cuong DINH
Isabelle GALLAGHER
Marc HINDRY

Jean-François MESTRE
Jean-Pierre OTAL
Hervé PAJOT
Emmanuel ULLMO

Christoph SORGER (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
91944 les Ulis cedex A
France
www.edpsciences.com

Tarifs 2009

Vente au numéro : 28 € (\$42)

Abonnement Europe : 81 €, hors Europe : 90 € (\$137)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Panoramas et Synthèses

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2009

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 1272-3835

ISBN 978-2-85629-274-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 28

**MATHEMATICAL MODELS AND NUMERICAL
METHODS FOR RADIATIVE TRANSFER**

**C. Berthon, C. Buet, J.-F. Coulombel, B. Desprès, J.
Dubois, T. Goudon, J. E. Morel & R. Turpault**

Société mathématique de France 2009

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

C. Berthon Laboratoire Jean Leray, Université de Nantes, 2 rue de la Houssinière, 44322 Nantes Cedex 3, France

Christophe Buet CEA/DAM Ile de France, BP 12, 91680 Bruyères-Le-Châtel, France
E-mail : Christophe.Buet@cea.fr

Jean-François Coulombel
CNRS, Laboratoire Paul Painlevé (UMR CNRS 8524), Bâtiment M2,
Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail : jfcoulom@math.univ-lille1.fr

Bruno Després Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris 6, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris

J. Dubois CEA-CESTA, BP2, 33114 Le Barp, France

Thierry Goudon
Project Team SIMPAF Centre de Recherche INRIA Lille Nord Europe,
40 avenue Halley, Park Plaza, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail : thierry.goudon@inria.fr

Jim E. Morel Texas A&M University, Department of Nuclear Engineering, 129 Zachry ERC, TAMU, 3133, College Station, Texas 77843, U.S.A.

R. Turpault Laboratoire Jean Leray, Université de Nantes, 2 rue de la Houssinière, 44322 Nantes Cedex 3, France

2000 Mathematics Subject Classification. — 35B35, 35L67, 65M06, 65M12, 65M60, 65N06, 76L05, 78A40, 85A15, 85A25.

Key words and phrases. — Asymptotic preserving methods, asymptotic schemes, diffusion limit, discrete-ordinates, finite volume schemes, finite-differences, finite-elements, flux limitation, Krylov methods, M_1 model, moments model, non-equilibrium diffusion regime, numerical methods, operator splitting, positiveness, preconditioning, radiation hydrodynamics, radiative transfer, schemes, shocks profiles, stability analysis.

Mots-clé et phrases. — Analyse de stabilité, asymptotiques, décomposition d'opérateurs, différences finies, éléments finis, flux limité, hydrodynamique radiative, limite de diffusion, méthodes de Krylov, méthodes numériques, méthodes préservant l'asymptotique, modèle M_1 , modèles aux moments, ordonnées discrètes, positivité, préconditionnement, profils de choc, régime diffusif hors équilibre, schémas volumes finis, transfert radiatif.

MATHEMATICAL MODELS AND NUMERICAL METHODS FOR RADIATIVE TRANSFER

**C. Berthon, C. Buet, J.-F. Coulombel, B. Desprès, J. Dubois,
T. Goudon, J. E. Morel & R. Turpault**

Abstract. — Radiative transfer phenomena arise in many applications ranging from astrophysics to photon beam radiotherapy. This volume describes some aspects of modern radiative transfer theory, dealing with models where the transport equation for the radiative energy is coupled to hydrodynamic systems. The discussion is specifically oriented to the design of dedicated efficient numerical methods. In particular, details are given on:

- asymptotic regimes and asymptotic models that lead to diffusion approximations,
- intermediate models like the M_1 model based on an entropy minimization closure,
- the analysis of shock profiles in radiative hydrodynamics.

Résumé (Modèles mathématiques et méthodes numériques pour le transfert radiatif)

L'étude de phénomènes de transfert radiatif est motivée par de multiples applications allant de l'astrophysique à la radiothérapie. Ce volume décrit quelques aspects de la théorie moderne du transfert radiatif. On s'intéresse à des modèles où l'équation de transport pour l'énergie radiative est couplée à des systèmes hydrodynamiques. La présentation est tout particulièrement orientée sur la dérivation de méthodes numériques spécifiques et efficaces et les points suivants sont abordés en détail :

- les régimes et les modèles asymptotiques qui conduisent à des approximations par diffusion,
- les modèles intermédiaires et notamment le modèle M_1 dont la dérivation repose sur un principe de minimisation d'entropie,
- l'analyse de profils de choc pour l'hydrodynamique radiative.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	xiii
References	xxi
BRUNO DESPRÉS & CHRISTOPHE BUET — <i>Grey Radiative Hydrodynamics — Hierarchy of models and numerical approximation</i>	
	1
1. Introduction	1
2. Hierarchy of grey models	3
3. Numerical methods	13
4. Advanced methods	16
5. Discretization of the system (54)	20
6. Numerical results	24
7. Conclusion	28
References	30
Appendix: proof of the lemma 3	32
JIM E. MOREL — <i>Discrete-ordinates transport methods for non-relativistic radiation-hydrodynamics</i>	
	35
1. Introduction	35
2. An Approximate Radiation-Hydrodynamics Model	36
3. Transfer Discretization and Solution Techniques	40
4. Operator Splitting for Radiation-Hydrodynamics	49
References	53
C. BERTHON & J. DUBOIS & R. TURPAULT — <i>Numerical Approximation of the M_1-model</i>	
	55
1. Introduction	55
2. The M_1 model	56
3. An Asymptotic Preserving Scheme	67
4. HLLC Approximate Riemann Solver	73
5. Numerical experiments	79
References	85

JEAN-FRANÇOIS COULOMBEL & THIERRY GOUDON — <i>Shock profiles in radiative hydrodynamics</i>	87
1. Introduction	87
2. Toy model	93
3. Radiative hydrodynamics	96
4. Numerical methods	101
References	106

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Hydrodynamique radiative grise ; hiérarchie de modèles et approximation numérique
BRUNO DESPRÉS & CHRISTOPHE BUET 1

Nous considérons les modèles dits gris pour le couplage du rayonnement et de l'hydrodynamique, dans l'objectif de construire des méthodes de résolution numériques eulériennes. Cela pose de nombreuses difficultés mathématiques et numériques. Nous en considérons quelques unes en portant l'accent sur les modèles de diffusion hors équilibre, les modèles aux moments et les schémas « asymptotic preserving ».

Méthodes des ordonnées discrètes pour l'hydrodynamique radiative non relativiste
JIM E. MOREL 35

La méthode des ordonnées discrètes consiste en une discrétisation angulaire particulière de l'équation du transfert radiatif. Cette méthode occupe depuis quelques années une position dominante. En fait, sous le vocable « méthodes des ordonnées discrètes » on fait référence à la discrétisation angulaire par ordonnées discrètes appliquée en combinaison avec des techniques de discrétisation variées pour les autres variables de l'équation de transport, ainsi qu'avec des techniques de résolution des équations discrètes associées. Dans cet article, nous présenterons une revue des applications de ces méthodes au transport de radiation et à l'hydrodynamique radiative en régime non-relativiste.

Approximation numérique du modèle M_1
C. BERTHON & J. DUBOIS & R. TURPAULT 55

On s'intéresse ici à la simulation des interactions entre la matière et le transfert radiatif. Certaines applications nécessitent un couplage fort entre rayonnement et hydrodynamique complexe. Dans ce cas, il est très coûteux numériquement d'utiliser un modèle cinétique. Notre choix se porte alors sur un modèle aux moments : le modèle M_1 . Ses principales propriétés mathématiques sont établies, en particulier le comportement asymptotique du modèle lorsque les opacités deviennent grandes. Des méthodes numériques sont ensuite étudiées et leur robustesse

ainsi que leur comportement asymptotique sont alors établis. Enfin, on illustre l'intérêt du modèle M_1 par des simulations numériques.

Profils de choc en hydrodynamique radiative

JEAN-FRANÇOIS COULOMBEL & THIERRY GOUDON 87

Dans cette contribution nous présentons quelques résultats récents sur des modèles d'hydrodynamique radiative. Tout d'abord, nous nous intéressons à la dérivation de modèles asymptotiques. Puis nous discutons quelques résultats sur un modèle simplifié scalaire. Ces résultats servent de guide pour l'analyse d'un modèle plus réaliste qui couple un système d'équations hydrodynamiques avec une équation de diffusion pour les radiations. Nous terminons en détaillant des procédures de simulation numérique qui permettent de capturer les solutions de type ondes progressives.

ABSTRACTS

Grey Radiative Hydrodynamics — Hierarchy of models and numerical approximation
BRUNO DESPRÉS & CHRISTOPHE BUET 1

We address grey models for the coupling of radiation and hydrodynamics, having in mind the derivation of eulerian numerical methods. It raises many mathematical and numerical difficulties. In this text we focus on some of them which are: the grey non equilibrium diffusion model, moments models and asymptotic preserving numerical methods.

Discrete-ordinates transport methods for non-relativistic radiation-hydrodynamics
JIM E. MOREL 35

The discrete-ordinates method is a particular angular discretization of the radiative transfer equation that has become the dominant angular discretization over the last several decades. The term “discrete-ordinates methods” generally refers to the discrete-ordinates angular discretization applied in conjunction with various discretization techniques for the other variables in the transport equation, as well as solution techniques for the associated discrete equations. In this paper we present an overview of the application of discrete-ordinates methods to thermal radiation transport and radiation-hydrodynamics in the non-relativistic regime.

Numerical Approximation of the M_1 -model
C. BERTHON & J. DUBOIS & R. TURPAULT 55

The radiative transfer equations are considered in the present work to simulate the radiative fields and their interactions with the matter. The expected numerical simulations imply to couple radiative transfer and hydrodynamic. To perform such experiments, a radiative kinetic model is too expensive and moment models must be privileged. The M_1 model is thus considered and its main mathematical properties are established. A particular attention is paid on the asymptotic behavior of the model as soon as the opacities are large. Relevant numerical methods are then studied and proved to be robust and asymptotic preserving. Numerical experiments illustrate the interest of the M_1 model.

Shock profiles in radiative hydrodynamics

JEAN-FRANÇOIS COULOMBEL & THIERRY GOUDON 87

In this article we review some models and recent results in radiative hydrodynamics. We first focus on the derivation of asymptotic models. Then we present some results on the analysis of a scalar toy model. These first results guide us through the analysis of a more realistic model that couples the hydrodynamics equations with a diffusion equation for the radiations. In the end, we present some numerical procedures that capture traveling waves solutions.

FOREWORD

This volume collects the contributions of a summer school held in Nice July 31st–August 4th, 2007, at the Lab. J. A. Dieudonné, UMR CNRS 6621–Université Nice Sophia Antipolis. It offers an overview of the state of the art on modern problems in radiative transfer, with a strong focus on the design of performing numerical schemes able to treat the multi-scale nature of the problem.

The summer school has been organized as a scientific event of the French Mathematical Society (SMF) as part of the series “Session États de la Recherche”. It is worth pointing out that the school, which was clearly oriented to mathematical questions, held jointly with a workshop devoted to Non Local Thermodynamic Equilibrium Modeling of Stellar Atmospheres organized by astrophysicists. Sharing with them some conferences and most part of the free time was a great opportunity for stimulating discussions. Thanks are addressed to the CNRS for its support to the organization of these meetings.

The warmest acknowledgments are addressed to the lab. J. A. Dieudonné that hosted with great enthusiasm the meeting: in particular, Philippe Maisonobe who generously opened the doors of the lab and offered all the necessary facilities. On behalf all the contributors I express my heartfelt thanks to the staff of the lab. and especially to Isabelle De Angelis, Jean-Marc Lacroix, Jean-Paul Pradère and Marie-Christine Bermond for their participation to the success of the meeting. Their care of the details, thus guaranteeing the comfort of all of the attendees, was really far beyond the best professional commitment.

Thierry Goudon

INTRODUCTION

The interest for the equations of radiative transfer theory is two-fold: firstly, the strong motivation coming from the applications and secondly, the mathematically challenging study of the corresponding systems of PDEs, both for analysis and simulation. This field of research naturally appeals to scientific interactions and the various viewpoints can cross-fertilize in an interesting way.

As a warm-up, let us list a few physical situations where radiative transfer models arise. The first applications we have in mind are related to high temperature combustion phenomena. The best illustration arises in astrophysics, when describing the dynamics of stars atmospheres, as introduced in the seminal treatise by Chandrasekhar [3]. Dealing with less extreme temperatures, coupled systems of PDEs describing radiative transfer and energy exchanges also arise when designing industrial furnaces or spacecraft propellers. Recently such models have been used to simulate fires in tunnels and to help validating prevention strategies. Nuclear engineering also appeals to radiative transfer problems: the design and the control of the operations in nuclear plants lead to describe energy exchanges between the combustible rods and the surrounding heat conducting fluid. The specific structure of the nuclear cores usually leads to complicated homogenization issues. Another modern application is related to Earth observation by satellites; it motivates both the direct and the inverse problems where we try to identify the optical properties of the atmosphere from the measurements. This topic is particularly relevant for estimating the chemical fluxes that drive climate changes. Equally electricity distribution addresses specific questions on radiative transfer. Indeed, installing an underground network of electricity distribution is highly costly; but repairing the failures of such network might also have a prohibitive cost. Therefore, companies are interested in preventing excess of heating due to Joule effect when a peak of consumption arises, which can combine with an unusually high external temperature. Last but not least, the design of ceiling in order to optimize heat draining has motivated recent research on energy exchanges. Of course, for such applications the temperature remains quite low, as well as the radiative energy, but the effects cannot be neglected anymore.

On the mathematical viewpoint, the systems of PDEs that describe the energy exchanges between fluid and radiative energy are very rich of intriguing questions. Of course, discussion of existence and uniqueness questions is a natural first issue,