

ASTÉRISQUE 282

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2000/2001
EXPOSÉS 880-893

Société Mathématique de France 2002
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, École normale supérieure,
45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.

Url : <http://www.bourbaki.ens.fr/>

Mots clefs et classification mathématique par sujets (2000)

Exposé n° 880. — Application birationnelle, éclatement lisse. — 14Exx.

Exposé n° 881. — Hyperbolicité, courbes entières, surfaces algébriques complexes, feuilletages. — 14J29, 32Q45, 37F75.

Exposé n° 882. — Espace probabilisé filtré, filtration standard, filtration brownienne, critère de Vershik, filtration confortable. — 60G05, 60G25, 60G42, 60G44.

Exposé n° 883. — Variétés asymptotiquement plates, courbure scalaire, masse, inégalité de Penrose, trous noirs. — 53C21, 58J35, 58J60, 83C30, 83C57.

Exposé n° 884. — Systèmes hamiltoniens, systèmes intégrables, géométrie symplectique, théorie de Galois différentielle, système de Hénon-Heiles. — 34XX, 37JXX, 37K10, 53DXX, 70G45.

Exposé n° 885. — Fonctions zétas, intégrales itérées, fonctions (quasi-)symétriques, nombres de Bernoulli, polylogarithmes, nombres polyzétas, nombres transcendants, mélange, séries génératrices, polynômes non commutatifs, algèbre de Hopf. — 11J82, 40B05, 17B01, 33E20, 34M35.

Exposé n° 886. — Géométrie d'Arakelov, méthode des pentes, feuilles algébriques de feuilletages, équations différentielles arithmétiques, propriété de Liouville. — 14G40, 11GXX, 37F75.

Exposé n° 887. — Fonctions L , matrices aléatoires. — 11F66, 11M36, 15A52.

Exposé n° 888. — Quantification, réduction, variété symplectique préquantifiée, conjecture de Guillemin-Sternberg, action hamiltonienne, opérateur de Dirac, orbites coadjointes, multiplicités, polytope de Kirwan, indice, coupure symplectique. — 22-XX, 53-XX.

Exposé n° 889. — Entropie, algèbres de von Neumann, probabilités libres. — 46L54, 46L10.

Exposé n° 890. — Représentations automorphes, functorialité, conjectures de Langlands, valeur propre du laplacien. — 22E55, 22E50.

Exposé n° 891. — Hauteurs, variétés de Fano. — 14G05, 11G35.

Exposé n° 892. — Géométrie non commutative, opérateur de signature transverse, algèbres de Hopf. — 16S38, 16W30, 57T05.

Exposé n° 893. — Équations de Boltzmann, Euler, Stokes et Navier-Stokes, limite hydrodynamique, entropie. — 76D05, 76P05.

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2000/2001
EXPOSÉS 880-893

Résumé. — Comme les précédents volumes de ce séminaire, celui-ci contient quatorze exposés de synthèse sur des sujets d'actualité : quatre exposés de géométrie algébrique, deux de probabilités, classiques ou libres, un de géométrie riemannienne, un de géométrie non commutative, un sur la (non) intégrabilité des systèmes hamiltoniens, un sur les fonctions L et les matrices aléatoires, un sur la fonctorialité de Langlands, un sur les fonctions polylogarithmes, un sur la quantification géométrique et un sur les équations hydrodynamiques.

Abstract (Séminaire Bourbaki, volume 2000/2001, exposés 880-893)

As in the preceding volumes of this seminar, one finds here fourteen survey lectures on topics of current interest: four lectures on algebraic geometry, two on probability, classical or free, one on Riemannian geometry, one on non-commutative geometry, one on (non-)integrability of Hamiltonian systems, one on L -functions and random matrices, one on Langlands functoriality, one on polylogarithms, one on geometric quantization and one on hydrodynamical equations.

Résumés des exposés	vii
<i>NOVEMBRE 2000</i>	
880 Laurent BONAVERO — <i>Factorisation faible des applications birationnelles [d'après Abramovich, Karu, Matsuki, Włodarczyk et Morelli]</i>	1
881 Marco BRUNELLA — <i>Courbes entières dans les surfaces algébriques complexes [d'après McQuillan, Demailly–El Goul,...]</i>	39
882 Michel ÉMERY — <i>Espaces probabilisés filtrés : de la théorie de Vershik au mouvement brownien, via des idées de Tsirelson</i>	63
883 Marc HERZLICH — <i>L'inégalité de Penrose [d'après H. Bray, G. Huisken et T. Ilmanen,...]</i>	85
<i>MARS 2001</i>	
884 Michèle AUDIN — <i>Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens [d'après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis,...]</i>	113
885 Pierre CARTIER — <i>Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents</i>	137
886 Antoine CHAMBERT-LOIR — <i>Théorèmes d'algébricité en géométrie diophantienne [d'après J.-B. Bost, Y. André, D. & G. Chudnovsky]</i>	175
887 Philippe MICHEL — <i>Répartition des zéros des fonctions L et matrices aléatoires</i>	211
888 Michèle VERGNE — <i>Quantification géométrique et réduction symplectique</i>	249
<i>JUIN 2001</i>	
889 Philippe BIANE — <i>Entropie libre et algèbres d'opérateurs</i>	279
890 Guy HENNIART — <i>Progrès récents en fonctorialité de Langlands</i> ..	301
891 Emmanuel PEYRE — <i>Points de hauteur bornée et géométrie des variétés [d'après Y. Manin et al.]</i>	323
892 Georges SKANDALIS — <i>Géométrie non commutative, opérateur de signature transverse et algèbres de Hopf [d'après A. Connes et H. Moscovici]</i>	345
893 Cédric VILLANI — <i>Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann [d'après C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore, P.-L. Lions, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond]</i>	365

Laurent BONAVERO – *Factorisation faible des applications birationnelles [d’après Abramovich, Karu, Matsuki, Włodarczyk et Morelli]*

Dans cet exposé, nous expliquerons le résultat suivant démontré récemment par Abramovich, Karu, Matsuki et Włodarczyk : toute application birationnelle entre deux variétés algébriques complètes et lisses sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle se factorise en une suite finie d’éclatements et de contractions de centres lisses. Ce résultat n’aurait sans doute pas vu le jour sans la démonstration de son analogue dans le cadre de la géométrie torique par Morelli et Włodarczyk au milieu des années 90. La démonstration donnée par Abramovich, Karu, Matsuki et Włodarczyk est une réduction au cas torique, nous en donnerons les grandes étapes.

Marco BRUNELLA – *Courbes entières dans les surfaces algébriques complexes [d’après McQuillan, Demailly–El Goul,...]*

Une *courbe entière* dans une variété complexe X est une application holomorphe non constante de la droite complexe \mathbf{C} à valeurs dans X . Autour de 1970, Kobayashi conjectura qu’une hypersurface générique dans $\mathbf{C}P^n$, de degré assez grand, ne contient aucune courbe entière. Autour de 1980, Green et Griffiths conjecturèrent qu’aucune courbe entière dans une variété projective complexe de type général (e.g., une hypersurface dans $\mathbf{C}P^n$ de degré $\geq n + 2$) n’est Zariski-dense. On exposera les résultats récents de McQuillan et de Demailly–El Goul sur ces deux conjectures, dans le cas bidimensionnel. Ces travaux passent à travers la construction et l’étude de certains feuilletages holomorphes.

Michel ÉMERY – *Espaces probabilisés filtrés : de la théorie de Vershik au mouvement brownien, via des idées de Tsirelson*

Il y a une trentaine d’années, Vershik a exhibé des espaces probabilisés filtrés aux propriétés paradoxales, et donné un critère nécessaire et suffisant pour que de telles propriétés se manifestent. Longtemps inconnus des probabilistes occidentaux, ces travaux, prolongés depuis quelques années par les idées de Tsirelson, permettent de progresser dans la compréhension du mouvement brownien.

Marc HERZLICH – *L’inégalité de Penrose [d’après H. Bray, G. Huisken et T. Ilmanen,...]*

R. Penrose a conjecturé en 1973 que la masse d’un trou noir isolé devait être minorée par une fonction explicite de son aire. Cet énoncé de nature physique possède une interprétation élégante en des termes purement géométriques. Cette traduction mathématique a résisté pendant près de 25 ans à toutes les tentatives de démonstration et ce n’est qu’en 1997 que G. Huisken et T. Ilmanen ont pu apporter une preuve complète et rigoureuse de l’inégalité de Penrose. Depuis, une autre démonstration a vu le jour sous la plume de H. Bray. L’intérêt et les grandes lignes des deux approches seront décrites dans l’exposé.

Michèle AUDIN – *Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens* [d'après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis,...]

Les systèmes différentiels hamiltoniens décrivent les systèmes mécaniques dont l'énergie est conservée. Un système hamiltonien est dit « intégrable » s'il a « assez » d'autres quantités conservées. Il y a des systèmes hamiltoniens dont on soupçonne qu'ils ne sont pas intégrables. Mais comment le *démontrer*? Dans cet exposé, je présenterai des réponses à cette question, résultats de non-intégrabilité basés sur les propriétés du groupe de monodromie (Ziglin, 1982) ou du groupe de Galois différentiel (Morales & Ramis, 1998) du système linéarisé le long d'une solution particulière.

Pierre CARTIER – *Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents*

Les séries L de Dirichlet se généralisent en les sommes $Li\left(\begin{smallmatrix} z_1 \dots z_r \\ s_1 \dots s_r \end{smallmatrix}\right) = \sum_{(n)} \frac{z_1^{n_1} \dots z_r^{n_r}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}$ (somme sur les systèmes d'entiers $n_1 > \dots > n_r > 0$). Le problème arithmétique central est la nature des nombres $Li\left(\begin{smallmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_r \\ s_1 \dots s_r \end{smallmatrix}\right)$ où les σ_i sont des racines de l'unité et les s_i des entiers positifs. On énoncera les principales conjectures actuelles (Drinfeld, Deligne, Ihara,...) et les résultats positifs déjà obtenus (Goncharov, Racinet, Écalle, Rivoal,...). On montrera le rôle important joué par des torseurs sous des groupes pro-unipotents.

Antoine CHAMBERT-LOIR – *Théorèmes d'algébricité en géométrie diophantienne* [d'après J.-B. Bost, Y. André, D. & G. Chudnovsky]

Dans un article récent, J.-B. Bost établit un critère assurant que certaines « sous-variétés formelles » de variétés algébriques sont en fait algébriques. Son théorème unifie et généralise des résultats des frères Chudnovsky et de Y. André motivés par une conjecture arithmétique de Grothendieck prédisant que les solutions de certaines équations différentielles sont des fonctions algébriques.

La démonstration reprend les techniques d'approximation diophantienne utilisées par ces auteurs avec toutefois un point de vue systématiquement géométrique, via notamment la géométrie d'Arakelov et le formalisme des pentes.

Philippe MICHEL – *Répartition des zéros des fonctions L et matrices aléatoires*

Récemment, Katz et Sarnak (inspirés par des travaux antérieurs de Montgomery) ont proposé de modéliser les zéros des fonctions L par les valeurs propres de matrices aléatoires de grand rang. Dans cet exposé, nous passons en revue les différentes statistiques qui ont été utilisées pour éprouver la validité de ce modèle (sans obtenir de contraction jusqu'ici!), et notamment la distribution, étudiée en détail par Iwaniec, Luo et Sarnak, des « petits » zéros dans les familles de fonctions L . Nous discuterons également d'applications importantes suggérées par ce modèle.

Michèle VERGNE – *Quantification géométrique et réduction symplectique*

Soit M une variété symplectique, et f une fonction réelle sur M , engendrant une action circulaire. On espère (credo de la mécanique quantique) qu'il existe un espace de Hilbert $Q(M)$ et un opérateur $Q(f)$ dont les valeurs propres sont les valeurs entières de f . La conjecture de Guillemin-Sternberg exprime la multiplicité des valeurs propres en fonction de la fibre réduite de f . Elle a été prouvée pour une action d'un groupe compact sur une variété compacte préquantifiable par Meinrenken-Sjamaar et par Tian-Zhang.

Philippe BIANE – *Entropie libre et algèbres d'opérateurs*

Voiculescu a introduit une notion d'entropie pour un n -uplet d'opérateurs auto-adjoints dans une algèbre de von Neumann finie, définie, à la Boltzmann, comme le logarithme du volume d'un ensemble de micro-états matriciels. En utilisant cette entropie libre, Voiculescu montre que les facteurs de groupes libres n'ont pas de sous-algèbre de Cartan, tandis que Liming Ge montre qu'ils sont premiers. Il s'agit des premiers exemples de tels facteurs. On décrira ces résultats, ainsi que d'autres applications dues, notamment, à Dykema, Ge et Stefan.

Guy HENNIART – *Progrès récents en functorialité de Langlands*

Soit $f = \sum a_n q^n$ une forme modulaire classique, vecteur propre des opérateurs de Hecke. On sait lui associer une représentation ℓ -adique $\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ telle que $L(\rho, s)$ soit à peu près $L(f, s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$. Si $\text{Sym}^k : \text{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow \text{GL}_{k+1}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est la représentation donnée par le produit symétrique k -ième, on espère que $L(\text{Sym}^k \circ \rho, s)$ est la fonction L d'un objet analytique comme la forme f , une représentation automorphe pour GL_{k+1} sur \mathbb{Q} . C'est un cas particulier des conjectures de functorialité de Langlands. Nous exposerons les résultats récents sur ces conjectures, et notamment les travaux de Kim et Shahidi pour Sym^3 et Sym^4 .

Emmanuel PEYRE – *Points de hauteur bornée et géométrie des variétés [d'après Y. Manin et al.]*

Si V est une variété algébrique ayant une infinité de points rationnels sur un corps de nombres, il est naturel de munir V d'une hauteur et d'étudier de manière asymptotique les points rationnels de hauteur bornée sur V . Les conjectures énoncées par Manin vers 1989 proposent une interprétation géométrique de ce comportement asymptotique où le fibré canonique et le cône engendré par les diviseurs effectifs dans le groupe de Néron-Severi jouent un rôle crucial. Le but de cet exposé est un survol des travaux suscités par ces conjectures.

Georges SKANDALIS – *Géométrie non commutative, opérateur de signature transverse et algèbres de Hopf [d'après A. Connes et H. Moscovici]*

Dans cet exposé, nous présentons une série de travaux de Connes-Moscovici, qui construisent un opérateur de signature (presque) invariant par le groupe de tous les difféomorphismes d'une variété, donnent une formule de l'indice « locale » pour cet opérateur, puis introduisent une algèbre de Hopf naturelle. Celle-ci joue le rôle de « groupe quantique » de « symétries quantiques » de ce système; elle permet de simplifier les calculs dans cette formule d'indice. En particulier, la cohomologie cyclique de cette algèbre de Hopf est égale à la cohomologie de Gelfand-Fuchs.

Cédric VILLANI – *Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann [d'après C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore, P.-L. Lions, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond]*

Considérons un gaz de particules obéissant aux lois de la mécanique classique. Selon les échelles physiques considérées, on peut en faire une description microscopique (équations de Newton), cinétique (équation de Boltzmann...) ou hydrodynamique (équations d'Euler, Navier-Stokes...). Le sixième problème de Hilbert concerne la cohérence mathématique de ces différentes modélisations. On exposera certains des progrès importants réalisés très récemment par Bardos, Golse, Levermore, Lions, Masmoudi, Saint-Raymond, quant au passage de l'équation de Boltzmann à diverses équations hydrodynamiques.

